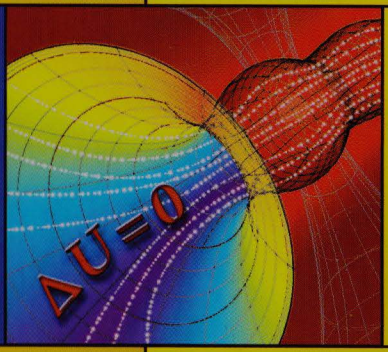
22.161.68
З-382

Университетский учебник

Е. В. Захаров
И. В. Дмитриева
С. И. Орлик

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



Прикладная математика и информатика

ACADEMIA

Редакционный совет серии

Председатели совета:

академик РАН Ю. И. Журавлев,
академик РАН В. А. Садовничий

Члены совета:

О. М. Белоцерковский (академик РАН),
В. П. Дымников (академик РАН),
Ю. Г. Евтушенко (академик РАН),
И. И. Еремин (академик РАН),
В. А. Ильин (академик РАН),
П. С. Краснощеков (академик РАН),
Е. И. Моисеев (академик РАН),
А. А. Петров (академик РАН),
Л. Н. Королев (член-корреспондент РАН),
Д. П. Костомаров (член-корреспондент РАН),
Г. А. Михайлов (член-корреспондент РАН),
Ю. Н. Павловский (член-корреспондент РАН),
К. В. Рудаков (член-корреспондент РАН),
Е. Е. Тыртышников (член-корреспондент РАН),
И. Б. Федоров (член-корреспондент РАН),
Б. Н. Четверушкин (член-корреспондент РАН)

Ответственный редактор серии

доктор физико-математических наук
Ю. И. Димитриенко

УНИВЕРСИТЕТСКИЙ УЧЕБНИК

Серия «Прикладная математика и информатика»

Е. В. ЗАХАРОВ, И. В. ДМИТРИЕВА, С. И. ОРЛИК

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Допущено
Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальностям «Механика», «Прикладная механика»,
«Прикладная математика и информатика»

Алтайский
госуниверситет
БИБЛИОТЕКА
№ 011433

ACADEMIA

Москва
Издательский центр «Академия»
2010

УДК 517.958(075.8)
ББК 22.311я73
З-382

Рецензенты:

д-р физ.-мат. наук, проф. *А. Г. Асланян* (Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (Технический университет));
д-р физ.-мат. наук, доц. *А. В. Сетуха* (зав. кафедрой высшей математики Военно-воздушной инженерной академии им. Н. Е. Жуковского)

Захаров Е. В.

З-382 Уравнения математической физики : учебник для студ. высш. учеб. заведений / Е. В. Захаров, И. В. Дмитриева, С. И. Орлик. — М. : Издательский центр «Академия», 2010. — 320 с. — (Университетский учебник. Сер. Прикладная математика и информатика).

ISBN 978-5-7695-5995-2

В учебнике представлен материал для первоначального изучения уравнений математической физики: даны математические постановки задач для уравнений в частных производных (теплопроводности, Лапласа, волнового); приведены доказательства теорем единственности, существования и устойчивости их решений; описаны методы построения решений.

Для студентов высших учебных заведений.

УДК 517.958(075.8)
ББК 22.311я73

Оригинал-макет данного издания является собственностью Издательского центра «Академия», и его воспроизведение любым способом без согласия правообладателя запрещается

© Захаров Е. В., Дмитриева И. В., Орлик С. И., 2010
© Образовательно-издательский центр «Академия», 2010
© Оформление. Издательский центр «Академия», 2010

ISBN 978-5-7695-5995-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

В основу данного учебника принят материал курса «Уравнения математической физики» для студентов факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМиК) Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова. Порядок изложения следующий:

- диссипативные процессы (теплопроводность, диффузия);
- стационарные процессы и явления (теплопроводность, электростатика);
- волновые процессы (колебания стержня или струны, звуковые колебания).

В учебнике выведены дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие указанные физические процессы; рассмотрены физические и математические предположения, лежащие в основе вывода этих уравнений; проведено сравнение случаев одной, двух и трех пространственных переменных; разъяснен смысл дополнительных условий — краевых, начальных; изучены задачи с краевыми условиями первого, второго и третьего рода; классифицированы линейные относительно старших производных дифференциальные уравнения второго порядка и построены их канонические формы; дано определение характеристик дифференциальных уравнений и обсуждена их роль в постановках задач.

Одна из главных целей ученика — сформулировать математические задачи для простейших уравнений параболического, эллиптического и гиперболического типов и дать определения их классических решений. Значительное внимание уделено доказательству теорем единственности решений рассматриваемых задач (задачи Коши, начально-краевых задач), а также вопросам существования классического решения и его устойчивости. Наряду с классическими рассмотрены обобщенные решения — на интуитивном уровне математической строгости.

В учебнике подробно описаны методы разделения переменных и функций Грина, а для волнового уравнения — метод распространяющихся волн. В связи с разбором примеров упомянуты

некоторые специальные функции математической физики, однако авторы сознательно стараются их избегать: специальным функциям и их применениям должен быть посвящен отдельный курс после первоначального ознакомления с предметом. Численные методы решения задач математической физики в книге не обсуждаются.

Многолетний опыт преподавания убедил авторов в том, что содержание курса «Уравнения математической физики» невозможно передать студенту без демонстрации широчайшего многообразия конкретных задач данной учебной дисциплины. Поэтому в учебник включено значительное число задач для самостоятельного решения. Следует подчеркнуть, что это не отменяет необходимость использования задачников.

Учебник снабжен приложением, в котором содержатся некоторые справочные сведения из математического анализа и линейной алгебры, важные понятия и факты, которые играют существенную роль в основном тексте.

Книга может быть использована для чтения курса лекций, а также при проведении семинарских занятий.

Студент, приступающий к изучению курса «Уравнения математической физики», должен знать основы математического анализа (включая теорию функциональных рядов, рядов и интеграла Фурье, несобственных интегралов и интегралов, зависящих от параметров, элементы векторного анализа) и уметь решать задачи для простейших обыкновенных дифференциальных уравнений. Знание основ теории функций комплексного переменного не предполагается. В некоторых случаях придется вспомнить сведения из линейной алгебры.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В данной главе приведена классификация основных уравнений математической физики и даны некоторые дополнительные условия, с помощью которых можно определить конкретное решение.

1.1. Уравнения математической физики и описываемые ими процессы

Уравнения математической физики описывают физические процессы и явления средствами математического анализа: они выражают физические законы в виде интегральных или дифференциальных соотношений. При этом всегда делаются упрощающие предположения: среда, в которой протекает процесс, рассматривается как сплошная; характеризующие ее физические величины считаются функциями координат и времени, непрерывными и достаточное число раз дифференцируемыми; некоторые величины предполагаются малыми и т. д. Если интересующая нас величина зависит от нескольких независимых переменных, то получаем для нее *дифференциальное уравнение в частных производных.*

1.1.1. Распространение теплоты в стержне. Уравнение теплопроводности с одной пространственной переменной

Части тела могут обмениваться теплотой, которая передается от более нагретой к более холодной. Рассмотрим процесс теплопроводности в стержне — обмен тепловой энергией между со-

седними частями стержня. Направим ось Ox вдоль стержня и обозначим через $u(x,\, t)$ температуру стержня в точке x в момент времени t. Предполагаем, что температура стержня не зависит от координат y и z. Предположение об одномерности процесса передачи теплоты означает, что в каждый момент времени изотермические сечения стержня совпадают с его поперечными сечениями $x = \text{const}$, а все поперечные сечения стержня одинаковы и имеют площадь S.

Если изменение температуры происходит только вследствие теплопроводности, то согласно закону сохранения энергии для участка стержня $[x_1,\, x_2]$, тепловая энергия, затраченная на изменение температуры этого участка в течение промежутка времени $[t_1,\, t_2]$, равна количеству теплоты, полученному участком $[x_1,\, x_2]$ за то же время через его концы. Это значит, что только потоки теплоты через концы $x = x_1$ и $x = x_2$ выделенного участка определяют изменение $u(x,\, t)$. Поток теплоты через поперечное сечение стержня (с координатой x) — это количество теплоты, пересекающей данное сечение вдоль оси Ox в единицу времени. *Плотностью потока теплоты* W (в точке x) называется поток через единицу площади поперечного сечения. Очевидно, что передача теплоты происходит от части стержня с более высокой температурой к части стержня с меньшей температурой. Этот факт выражается законом Фурье, связывающим W и u:

$$W = -k\frac{\partial u}{\partial x},$$

где $k > 0$ — коэффициент теплопроводности, который характеризует материал стержня.

Поток теплоты, втекающей на участок $[x_1,\, x_2]$ в момент времени τ, равен $S\left[k\dfrac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\Big|_{x=x_2} - k\dfrac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\Big|_{x=x_1}\right]$. Пусть удельная теплоемкость (теплоемкость единицы массы однородного вещества) стержня $c = \text{const} > 0$, объемная плотность массы $\rho = \text{const} > 0$ и коэффициент теплопроводности $k = \text{const} > 0$, $[c] = \dfrac{\text{Дж}}{\text{град}\cdot\text{г}}$, $[\rho] = \dfrac{\text{г}}{\text{см}^3}$, $[k] = \dfrac{\text{Дж}}{\text{см}\cdot\text{с}\cdot\text{град}}$. Тогда ***баланс теплоты*** для $[x_1,\, x_2]$ и $[t_1,\, t_2]$ можно записать в виде

$$S\int_{x_1}^{x_2} c\rho\big[u(x,t_2)-u(x,t_1)\big]dx = S\int_{t_1}^{t_2}\big[W(x_1,\tau)-W(x_2,\tau)\big]d\tau = \\ = S\int_{t_1}^{t_2}\left[k\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=x_2} - k\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}\right]d\tau. \tag{1.1}$$

Предполагая, что у функции $u(x,\, t)$ имеются непрерывные производные u_t и u_{xx}, запишем левую и правую части равенства (1.1) по интегральной теореме о среднем, разделим на $x_2 - x_1$ и на $t_2 - t_1$, а затем стянем отрезок $[x_1,\, x_2]$ в точку x, а отрезок $[t_1,\, t_2]$ — в точку t. Тогда баланс теплоты можно представить в виде

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

где $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$ $(a = \text{const} > 0)$.

Это дифференциальное уравнение относительно $u(x,\, t)$ называется ***уравнением теплопроводности.***

Температура стержня может изменяться не только из-за наличия в нем теплопроводности, но и от действия источников (или поглотителей) теплоты в стержне; пусть оно не зависит от температуры стержня $u(x,\, t)$. Для описания действия источников теплоты надо указать, как они распределены вдоль стержня и как их мощность зависит от времени. Будем считать известной объемную плотность мгновенных источников теплоты $F(x,\, t)$ (которая не зависит от y и z). Это значит, что на участке $[x,\, x + dx]$ за время $[t,\, t + dt]$ выделится теплота $F(x,\, t)S\,dx\,dt$, $[F] = \dfrac{\text{Дж}}{\text{с}\cdot\text{см}^3}$. Тогда к правой части баланса теплоты (1.1) надо прибавить $S\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x,\tau)\,dx\,d\tau$. Полагая, что функция $F(x,\, t)$ непрерывна по x и по t и снова используя интегральную теорему о среднем, получим неоднородное уравнение теплопроводности:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,\, t), \tag{1.2}$$

где $f = \dfrac{F}{c\rho}$.

Если стержень не является однородным (т. е. свойства его материала зависят от точки x), то в выражающем баланс теплоты равенстве надо учесть, что $c = c(x)$, $\rho = \rho(x)$, $k = k(x)$. Тогда

вместо линейного уравнения (1.2) с *постоянными коэффициентами* при u_t, u_{xx} получим линейное уравнение с *переменными коэффициентами*

$$c(x)\rho(x)u_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + F(x,t). \qquad (1.3)$$

Заметим, что решения задач для уравнения (1.2) можно построить в виде аналитических формул, а задачи для уравнения (1.3) приходится решать численно.

Свойства материала стержня могут зависеть от его температуры. Например, при известной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры $k = k(x, u)$ вместо уравнения (1.3) будем иметь *нелинейное уравнение*

$$c(x)\rho(x)u_t(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\big(x,u(x,t)\big)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + F(x,t). \qquad (1.4)$$

Возможен и случай, когда $c = c(x, u)$, $\rho = \rho(x, u)$. При выводе уравнений (1.3) и (1.4) следует полагать, что c и ρ — непрерывные функции, а функция k непрерывно дифференцируема.

Изменение температуры стержня может происходить еще и вследствие обмена теплотой между стержнем и окружающей средой через боковую поверхность стержня (если такого обмена нет, то боковая поверхность стержня называется *теплоизолированной* — поток теплоты через нее равен нулю.) Пусть температура внешней среды не зависит ни от x, ни от t. Предположим, что плотность потока теплоты, покидающей стержень через боковую поверхность подчиняется закону Ньютона, т. е. пропорциональна разности $u(x, t) - u_{\text{среды}}$. Запишем в этом случае баланс теплоты для участка стержня $[x_1, x_2]$ за время $[t_1, t_2]$:

$$S\int_{x_1}^{x_2} c\rho\big[u(x,t_2)-u(x,t_1)\big]dx = S\int_{t_1}^{t_2}\left[k\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=x_2} - k\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}\right]d\tau +$$

$$+S\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x,\tau)dxd\tau - \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\alpha\big(u(x,\tau)-u_{\text{среды}}\big)pdxd\tau,$$

где p — периметр изотермического поперечного сечения стержня (тогда pdx — элемент площади боковой поверхности); $\alpha > 0$ — коэффициент теплообмена между поверхностью стержня и окружающей средой.

Для однородного стержня (k, c, ρ, α, S, p — постоянны) как и в случае баланса теплоты (1.1) получаем дифференциальное

уравнение теплопроводности с учетом потерь теплоты через боковую поверхность:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,\ t) - b(u(x,\ t) - u_{\text{среды}}), \tag{1.5}$$

где $b = \dfrac{\alpha p}{Sc\rho} = \text{const} > 0$.

Если вместо $u(x,\ t)$ ввести функцию $v(x,\ t) = u(x,\ t) - u_{\text{среды}}$, то она будет удовлетворять уравнению $v_t = a^2 v_{xx} + f - bv$. Чтобы избавиться от члена, содержащего новую неизвестную функцию $v(x,\ t)$, выполним еще одну замену искомой функции: $v(x,\ t) = \mathrm{e}^{-bt} w(x,\ t)$. Тогда относительно функции $w(x,\ t)$ получим вместо (1.5) уравнение $w_t = a^2 w_{xx} + \mathrm{e}^{bt} f$.

В некоторых случаях может оказаться, что в процессе распространения теплоты температура не меняется со временем: $u = u(x)$. Например, вместо уравнения (1.2) она будет описываться уравнением $u_{xx}(x) = -\dfrac{F(x)}{k}$ — ***стационарным уравнением теплопроводности.***

Можно выбрать другие независимые переменные x' и t', в которых уравнение $u_t = a^2 u_{xx}$ примет вид $u_{t'} = u_{x'x'}$. Оно тоже называется уравнением теплопроводности. Действительно, к этому виду можно привести исходное уравнение, если выбрать новые переменные $x' = x$, $t' = a^2 t$ или $x' = \dfrac{x}{a}$, $t' = t$. Тогда $u = u_1(x'(x),\ t'(t))$.

Упрощать уравнения можно не только заменами независимых переменных, но и с помощью замен искомой функции (см. уравнение (1.5)). Приведем еще один пример.

Пример 1.1 (уравнение Бюргерса). Уравнением Бюргерса называется нелинейное уравнение

$$u_t = u_{xx} + (u_x)^2 \tag{1.6}$$

относительно функции $u(x,\ t)$, тесно связанное с уравнением теплопроводности. Если продифференцировать (1.6) по x и положить $v(x,\ t) = u_x(x,\ t)$, то функция $v(x,\ t)$ будет удовлетворять нелинейному уравнению $v_t = v_{xx} + 2vv_x$, которое появляется в некоторых физических задачах (оно также называется уравнением Бюргерса). Введем еще одну новую функцию: $w(x,\ t) = \mathrm{e}^{u(x,t)}$ и найдем ее производные: $w_t = u_t \mathrm{e}^u$, $w_x = u_x \mathrm{e}^u$, $w_{xx} = (u_{xx} + (u_x)^2)\mathrm{e}^u$.

Из (1.6) следует, что $w(x, t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности $w_t = w_{xx}$. Заметим, что нам нужны только положительные его решения: $w = \mathrm{e}^u > 0$. ■*

1.1.2. Уравнение теплопроводности с тремя пространственными переменными

Для описания процессов распространения теплоты в пространственном теле D введем температуру $u(M, t)$ в точке $M\,(x, y, z) \in \in D$ (x, y, z — декартовы координаты) в момент времени t. Если температура в разных точках тела различна, то в нем возникают потоки теплоты (тепловой энергии), направленные из областей с высокой температурой к областям с меньшей температурой. ***Потоком теплоты через элемент площади поверхности*** dS называется количество теплоты, пересекающей dS в единицу времени. Его можно охарактеризовать вектором плотности теплового потока $\mathbf{W}(M,t)$: если $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к dS, то поток теплоты через dS равен $(\mathbf{W},\mathbf{n})dS$. По *закону Фурье* в изотропной среде $\mathbf{W} = -k\,\mathrm{grad}_M u$, где $k > 0$ — коэффициент теплопроводности среды. Если среда неоднородна, то $k = k(M)$. Выделим произвольную пространственную область $D' \subset D$, ограниченную замкнутой кусочно-гладкой поверхностью S'. Пусть $\rho(M)$ — объемная плотность массы вещества, $c(M)$ — его удельная теплоемкость, а $F(M, t)$ — объемная плотность мгновенных тепловых источников. Запишем *баланс теплоты* для области D' в промежутке времени $[t_1, t_2]$:

$$\iiint\limits_{D'} c(M)\rho(M)\big[u(M,t_2)-u(M,t_1)\big]dxdydz =$$

$$= -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_{S'} (\mathbf{W},\mathbf{n})dS + \int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iiint\limits_{D'} F(M,t)dxdydz.$$

По формуле Остроградского $\iint\limits_{S'} (\mathbf{W},\mathbf{n})dS = \iiint\limits_{D'} \mathrm{div}_M \mathbf{W}\, dxdydz.$

Предположим, что функция $u(M, t)$ дважды непрерывно дифференцируема по x, y, z и непрерывно дифференцируема по t. Из закона Фурье $\mathrm{div}_M \mathbf{W} = -\mathrm{div}_M \left(k\,\mathrm{grad}_M u\right)$, и тогда баланс теплоты запишется в виде

---

* Здесь и далее знаком ■ будет отмечено окончание замечаний, примеров, решений задач и доказательств теорем.

$$\iiint_{D'} c(M)\rho(M)\left[u(M,t_2)-u(M,t_1)\right]dxdydz =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{D'} \operatorname{div}_M\left(k\operatorname{grad}_M u\right)dxdydz + \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_{D'} F(M,t)dxdydz. \tag{1.7}$$

Пусть функция F непрерывна по M и по t. К каждому из интегралов $\int_{t_1}^{t_2}$ и $\iiint_{D'}$ в (1.7) применим формулу среднего значения, затем разделим равенство (1.7) на объем области D' и на $t_2 - t_1$. Выполним предельный переход, стягивая область D' в точку M и устремляя $t_1 \to t$, $t_2 \to t$. В силу предположения о существовании у функции $u(M,\ t)$ указанных выше непрерывных производных получим

$$c(M)\rho(M)u_t(M,\ t) = \operatorname{div}_M(k(M)\operatorname{grad}_M u(M,\ t)) + F(M,\ t). \tag{1.8}$$

Дифференциальное уравнение (1.8) относительно функции $u(M,\ t)$ называется уравнением теплопроводности. Если $c = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, $k = \text{const}$, то уравнение (1.8) имеет вид

$$u_t(M,\ t) = a^2\Delta_M u(M,\ t) + f(M,\ t), \tag{1.9}$$

где $\Delta_M u = \operatorname{div}_M \operatorname{grad}_M u(M,\ t)$ — ***оператор Лапласа***; $a^2 = \dfrac{k}{c\rho}$; $f(M,t) = \dfrac{F(M,t)}{c\rho}$.

Замечание 1.1. В гл. 2 при изучении свойств решений уравнения теплопроводности будет показано, что уравнение теплопроводности обладает некоторым «дефектом» описания реальных процессов распространения теплоты. Согласно этому уравнению, если в точке M_0 сработает мгновенный точечный источник, т. е. в M_0 мгновенно выделится конечное количество теплоты, то изменение температуры во всей области D произойдет немедленно: для сколь угодно малого промежутка времени после срабатывания этого источника обусловленное им изменение температуры всюду отлично от нуля. Это значит, что «сигнал» о срабатывании источника в данной модели распространяется с бесконечной скоростью. Такая грубость математической модели происходит из феноменологического закона Фурье, который не учитывает, что тепловая энергия в действительности является энергией движущихся частиц, а температура пропорциональна средней

кинетической энергии частиц (для термодинамически равновесной макроскопической системы). Вопрос о пригодности уравнения теплопроводности сводится в сущности к вопросам об исходных для данной модели предположениях и о точности описания ею реальных процессов. Более последовательной моделью является интегро-дифференциальное уравнение переноса. ■

Замечание 1.2. В случае $f(M, t) \equiv 0$ можно доказать, что в любой открытой области изменения переменных x, y, z, t решение уравнения $u_t = a^2 \Delta u$ бесконечно дифференцируемо и аналитично по переменным x, y, z. ■

1.1.3. Уравнение диффузии

Диффузия — это взаимное проникновение соприкасающихся веществ в процессе теплового движения их молекул (более крупные частицы также могут диффундировать вследствие броуновского движения). Диффузия происходит в газах, жидкостях и твердых телах с разными характерными скоростями.

Рассмотрим простейший случай однокомпонентной среды, состоящей из молекул одного вида. Концентрацией такого вещества называется его масса, содержащаяся в единице объема, т. е. объемная плотность массы (если бы рассматривалась многокомпонентная среда, то концентрацией какой-либо ее компоненты нужно было бы назвать парциальную плотность — массу всех молекул данного вида в единице объема.) Концентрация вещества в различных частях пространственной области D может оказаться неодинаковой. Тогда за счет *переноса* некоторой массы вещества в процессе теплового движения молекул будет происходить выравнивание концентрации. Такой перенос массы в области D от частей с высокой концентрацией вещества к частям с меньшей концентрацией называется ***самодиффузией***, он ведет к равномерному распределению вещества в первоначально неоднородной среде.

Концентрация как отношение массы вещества к занимаемому объему имеет вполне определенный смысл лишь для конечного ненулевого объема (более точное название — средняя концентрация в данном объеме). Пренебрегая молекулярной структурой вещества, будем считать его *сплошной средой* и введем концентрацию $u(M, t)$ в каждой точке M области D в момент времени t. Эта идеализация означает, конечно, что предполагается суще-

ствование предела средней концентрации в некоторой окрестности точки M при стягивании этой окрестности в точку M. Вводя понятие концентрации $u(M, t)$ в каждой отдельной точке M, мы огрубляем реальную ситуацию. Но это понятие позволяет сформулировать простой закон, описывающий самодиффузию, и вывести уравнение, которому подчиняется $u(M, t)$.

Если область D заполнена неоднородной средой, то за единицу времени расположенную в D поверхность dS пересечет некоторое число молекул как в направлении уменьшения концентрации, так и в противоположном направлении. Разность между числами молекул, пересекающих dS в том и другом направлениях, определяет результирующий безвозвратный поток массы вещества через dS в сторону меньшей концентрации. Его можно охарактеризовать вектором плотности диффузионного потока $\mathbf{W}(M,t)$: если $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к dS, то диффузионный поток равен $(\mathbf{W},\mathbf{n})dS$. При отсутствии внешних воздействий и в случае постоянной в области D температуры (а также постоянного в области D давления, если речь идет о газе) $\mathbf{W}$ определяется законом Фика: $\mathbf{W} = -k\,\mathrm{grad}_M u$, где $k > 0$ — коэффициент диффузии (в физике принято другое обозначение). В общем случае коэффициент диффузии можно определить, рассматривая смещение отдельной молекулы, происходящее вследствие ее столкновений с другими молекулами. Это смещение меняется со временем случайным образом, но при большом числе столкновений его средний квадрат растет пропорционально времени; коэффициент пропорциональности называется *коэффициентом диффузии*. Очевидно, что коэффициент диффузии k имеет размерность $\frac{\text{см}^2}{\text{с}}$. Для простейшего случая самодиффузии в газах коэффициент диффузии можно найти из несложных молекулярно-кинетических рассуждений. Знак «минус» в законе Фика показывает, что перенос массы в процессе диффузии происходит от области с высокой концентрацией к области с меньшей концентрацией, а не наоборот. Закон Фика является феноменологическим, поскольку использует понятие концентрации u в точке $M(x, y, z)$, которая должна быть непрерывной и дифференцируемой по x, y, z функцией. Математически закон Фика аналогичен закону Фурье, описывающему теплопроводность (в частности, в приведенной выше его формулировке среда считается изотропной). В основе явлений теплопроводности и диффу-

зии лежит один и тот же механизм молекулярного переноса: закон Фика выражает перенос массы, а закон Фурье – перенос энергии. В обоих случаях предлагается не рассматривать собственно движения отдельных молекул, а ввести в каждой точке M области D величину $u(M,\ t)$ (концентрацию, температуру), характеризующую идеализированную сплошную среду.

Выделим в области D произвольную подобласть D', ограниченную замкнутой кусочно-гладкой поверхностью S'. Если в области D нет источников (или стоков) вещества, нет диффузии во внешнюю среду, а коэффициент диффузии $k = \text{const} > 0$, то из *баланса массы* для области D' в промежутке времени $[t_1,\ t_2]$

$$\iiint\limits_{D'} \left[u(M,t_2) - u(M,t_1)\right] dxdydz = -\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \iint\limits_{S'} (\mathbf{W},\mathbf{n})\, dS$$

и из закона Фика получаем (совершенно аналогично выводу уравнения (1.9)) дифференциальное уравнение диффузии:

$$u_t(M,\ t) = k\Delta_M u(M,\ t).$$

Как и в уравнении теплопроводности, в уравнении диффузии можно учесть действие других факторов, например, зависимость коэффициента диффузии от концентрации:

$$u_t(M,\ t) = \operatorname{div}_M(k(u(M,\ t))\operatorname{grad}_M u(M,\ t)).$$

1.1.4. Стационарное уравнение теплопроводности: уравнения Лапласа и Пуассона

Конкретный процесс теплопроводности в области D задается не только уравнением теплопроводности (у него имеется бесконечно много решений), но и некоторыми дополнительными условиями. В качестве таких дополнительных условий могут выступать начальное условие, определяющее температуру в D в момент времени $t = 0$, разнообразные режимы на границе S области D и др. Можно подобрать такие дополнительные условия, при которых температура не будет зависеть от времени: $u_t \equiv 0$. Такой процесс теплопроводности (в области D имеются тепловые потоки!) называется ***стационарным***. Если коэффициент теплопроводности $k = \text{const}$, то стационарная температура $u(M)$, $M \in D$ удовлетворяет не уравнению (1.9), а уравнению

$$\Delta u(M) = -\frac{F(M)}{k}, \tag{1.10}$$

которое называется ***уравнением Пуассона***.

Если в области D нет источников теплоты, то стационарная температура удовлетворяет в D уравнению

$$\Delta u(M) = 0, \tag{1.11}$$

которое называется *уравнением Лапласа.*

Нестационарные уравнения теплопроводности и диффузии, уравнения Лапласа и Пуассона удобно записывать в специально выбранной системе координат, связывая ее выбор с геометрией области D. Например, если D имеет форму прямоугольного параллелепипеда, то естественно решать задачи для таких уравнений в декартовой прямоугольной системе координат. Если D — прямой круговой цилиндр, то разумно выбрать цилиндрическую систему координат. Для шаровой области D удобна сферическая система координат. Возможны и более сложные ситуации, диктующие выбор других криволинейных систем координат. Будем далее пользоваться только указанными прямоугольной, цилиндрической и сферической системами координат в пространстве.

В некоторых случаях может оказаться, что температура не зависит от одной пространственной координаты (пусть, например, от координаты z в декартовой системе $Oxyz$): $u = u(x, y, t)$. Тогда в качестве области D надо рассматривать область изменения переменных x и y на плоскости Oxy. При этом уравнения (1.8)—(1.11) сохраняют свой вид (надо только учесть, что все производные функции u по z равны нулю). В зависимости от геометрии области D на плоскости бывает удобно вместо прямоугольной системы координат Oxy выбрать другую, например полярную систему координат.

Запишем оператор Лапласа в указанных системах координат:

- в *декартовой* $Oxyz$

$$\Delta_{x,y,z} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, M = M(x, y, z);$$

- *сферической* ($x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$)

$$\Delta_{r,\theta,\varphi} u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2},$$

$M = M(r, \theta, \varphi)$;

- *цилиндрической* ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$)

$$\Delta_{r,\varphi,z} u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\ M = M(r, \varphi, z).$$

На плоскости:

• в декартовой системе координат Oxy

$$\Delta_{x,y}u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\ M = M(x,\ y);$$

• полярной $(x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi)$

$$\Delta_{r,\varphi}u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},\ M = M(r,\ \varphi).$$

Приведем примеры стационарных распределений температуры.

Пример 1.2. Пусть в момент времени $t = 0$ однородный стержень $(D = \{0 < x < l\})$ имел температуру $u(x,\ 0) = u_0 x$, $u_0 = \text{const}$, $[u_0] = \dfrac{\text{град}}{\text{см}}$. Во все моменты времени $t \geq 0$ концы стержня поддерживаются при температуре $u(0,\ t) = 0$ и $u(l,\ t) = u_0 l$, а боковая поверхность стержня теплоизолирована; источников теплоты в стержне нет. Очевидно, что функция $u_0 x$ удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 u_{xx} = 0$, т. е. является стационарным распределением температуры в стержне. ■

Пример 1.3. Пусть в момент времени $t = 0$ однородный стержень $(D = \{0 < x < l\})$ с коэффициентом теплопроводности $k = \text{const}$ имел температуру $u(x,0) = \dfrac{W}{k}\left(\dfrac{l}{2} - x\right)$, $W = \text{const} > 0$, $[W] = \dfrac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{см}^2}$. Во все моменты времени $t \geq 0$ через левый конец стержня снаружи «нагнетается» теплота внутрь стержня с постоянной плотностью теплового потока W, а через правый конец теплота «выкачивается» с той же плотностью теплового потока: $-ku_x(0,\ t) = W$, $-ku_x(l,\ t) = W$. Боковая поверхность стержня теплоизолирована, источников теплоты в стержне нет. Очевидно, что функция $\dfrac{W}{k}\left(\dfrac{l}{2} - x\right)$ удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 u_{xx} = 0$, т. е. является стационарным распределением температуры в стержне. ■

Пример 1.4. Если в момент времени $t = 0$ однородная плоская круглая пластина $(D = \{0 \leq r < r_0,\ 0 \leq \varphi < 2\pi\}$, r, φ — полярные координаты) имела температуру $u(r,\ \varphi,\ 0) = u_0 r\sin\varphi$, $u_0 = \text{const}$,

а во все моменты времени $t \geq 0$ на ее границе поддерживается температура $u(r_0, \varphi, t) = u_0 r_0 \sin\varphi$, то функция $u_0 r \sin\varphi$ удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 \Delta u = 0$ (проверьте!), т. е. является стационарным распределением температуры в пластине. ■

Пример 1.5. Стационарная температура $u(r, \varphi, \theta, t) = u_0 r$ ($u_0 = \text{const}$,) однородного шара ($D = \{0 \leq r < r_0, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$, r, φ, θ — сферические координаты) может быть получена заданием на его границе во все моменты времени температуры $u(r_0, \varphi, \theta, t) = u_0 r_0$ и действием источников (или поглотителей) тепло-ты, имеющих постоянное по времени центрально-симметричное распределение в шаре: $F(r, \varphi, \theta, t) \equiv F(r) = -\dfrac{2u_0 k}{r}$. Действительно, в этом случае температура в шаре не зависит от углов φ и θ, и тогда $\Delta_{r,\theta,\varphi} u = \dfrac{1}{r^2} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial u}{\partial r}\right) \equiv \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}$. Функция $u_0 r$ удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 \Delta u - \dfrac{2a^2 u_0}{r} = 0$ (проверьте!), т. е. уравнению $\Delta u = \dfrac{2u_0}{r}$. ■

Замечание 1.3. В примерах 1.2 — 1.5 неявно предполагалось, что температура u является функцией, непрерывной вплоть до границы области D (т. е. в замкнутой области $\overline{D}$). Уравнение теплопроводности справедливо только в открытой области D. ■

1.1.5. Уравнения стационарного растяжения и продольных колебаний упругого стержня

Упругий стержень (или пружина) растягивается или сжимается под действием внешних сил: эти силы вызывают смещение его частиц. Тогда в стержне возникают внутренние упругие силы между соседними частицами, которые препятствуют действию внешних сил. ***Деформация*** называется ***упругой***, если она исчезает после снятия внешнего воздействия. Пусть все поперечные сечения стержня в состоянии покоя одинаковы и имеют площадь S. Будем считать, что всякое поперечное сечение покоящегося стержня не меняет своей формы при действии внешних сил вдоль оси Ox, а только сдвигается вдоль стержня — вдоль оси Ox. Такой стержень можно считать одномерным. В *упругой сплошной среде* зависимость между возникающими напряже-

ниями и *малыми деформациями* выражается *законом Гука*. Напряжение — мера внутренних упругих сил в деформируемом теле — физическая величина σ, численно равная упругой силе, приходящейся на единицу площади сечения тела. Напряжение называют нормальным, если упругая сила $F_{\text{упр}}$ перпендикулярна поверхности сечения. Будем рассматривать только нормальные напряжения в стержне, которые вызваны направленными вдоль стержня внешними силами: $\sigma = F_{\text{упр}}/S$. Согласно закону Гука, нормальное напряжение пропорционально относительному удлинению: если участок покоящегося стержня имел длину l, а под действием внешних сил его длина стала равной $l + \Delta l$, то $\sigma = E\dfrac{\Delta l}{l}$, где $E > 0$ — коэффициент, зависящий от материала стержня; он называется модулем Юнга, $[E] = \dfrac{\text{г}}{\text{см} \cdot \text{с}^2}$.

Рассмотрим сначала стационарную деформацию стержня под действием распределенной вдоль него силы. Запишем закон Гука для участка стержня, который в состоянии покоя занимал положение $[x,\, x + \Delta x]$. Пусть в покое координату x имела некоторая частица стержня. Пусть в направлении оси Ox на стержень действует распределенная вдоль него внешняя сила $F(x)$ с линейной плотностью ее распределения $f(x)$ (f — сила, приходящаяся на единицу длины: $f = \dfrac{dF}{dx}$). Внешняя сила вызовет *смещение* указанной частицы на некоторую величину $u(x)$[см]. Частица, имевшая в покое координату $x + \Delta x$, сместится на $u(x + \Delta x)$, а выделенный участок займет положение $[x + u(x),\, x + \Delta x + u(x + \Delta x)]$. Относительное удлинение этого участка равно $\dfrac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$. Предполагая непрерывность и дифференцируемость функции $u(x)$, запишем разность $u(x + \Delta x) - u(x)$ по формуле Лагранжа. Тогда закон Гука утверждает, что $\sigma(x) = E(x)u_x(x + \theta\Delta x)$, где $0 < \theta < 1$. Если устремить $\Delta x \to 0$, то $\sigma(x) = E(x)u_x(x)$, т. е. сила упругости в точке x равна $F_{\text{упр}}(x) = \sigma(x)S = SE(x)u_x(x)$. Зависимость $E(x)$ возникает, если материал стержня неоднороден.

Теперь выделим произвольный промежуток $[x_1,\, x_2]$. Если состояние стержня стационарно, т. е. процесс растяжения прекратился, то для любого промежутка $[x_1,\, x_2]$ внутри стержня выполняется баланс сил:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + SE(x_2)u_x(x_2) - SE(x_1)u_x(x_1) = 0;$$

если всюду $f(x) > 0$, то в точке x_2 на выделенный участок $[x_1, x_2]$ действует сила упругости со стороны части стержня $x > x_2$, направленная в положительную сторону оси Ox, а в точке x_1 — сила упругости со стороны части стержня $x < x_1$, направленная в отрицательную сторону оси Ox. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывна, $E(x)$ непрерывно дифференцируема, а $u(x)$ — дважды непрерывно дифференцируема. Запишем $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ с помощью теоремы о среднем. Введем обозначение $SE(x) = k(x)$. Разделим уравнение баланса сил на $x_2 - x_1$ и устремим $x_1 \to x$, $x_2 \to x$. Тогда функция $u(x)$ будет удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению $\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du(x)}{dx}\right) = -f(x)$, которое описывает стационарное растяжение стержня. Для однородного стержня $k = \text{const}$, и получаем уравнение $u_{xx}(x) = -\frac{f(x)}{k}$, которое является уравнением Пуассона в одномерном случае.

Если состояние упругого стержня нестационарно, то смещение u зависит от времени. Пусть $u(x, t)$ — продольное смещение в момент времени t точки, имевшей в состоянии покоя координату x. Тогда $u_t(x,t)\left[\frac{\text{см}}{\text{с}}\right]$ — скорость движения в точке x в момент времени t. Если $\rho(x)$ — объемная плотность массы в точке x (стержень можно считать неоднородным), то $\rho(x)Sdx$ — масса участка стержня длиной dx. Выберем внутри стержня произвольный участок $[x_1, x_2]$. Изменение количества движения для этого участка в течение промежутка времени $[t_1, t_2]$ (изменение количества движения обусловлено действием внешней силы $F(x, t)$ с линейной плотностью ее распределения вдоль стержня $f(x, t)$ и действием сил упругости за указанное время) равно

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[u_t(x,t_2) - u_t(x,t_1)\right]\rho(x)dxS = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} f(x,t)dxdt +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} \left[SE(x_2)u_x(x_2,t) - SE(x_1)u_x(x_1,t)\right]dt.$$

Предположим, что $f(x,\ t)$ непрерывна по x и по t и запишем $\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,t)\,dx\,dt$ с помощью теоремы о среднем. Предположим существование непрерывных производных $u_{xx},\ u_{tt}$. Запишем по теореме о среднем два других интеграла. Разделим равенство на $x_2 - x_1$ и на $t_2 - t_1$. Устремим $x_1 \to x,\ x_2 \to x,\ t_1 \to t,\ t_2 \to t$. Тогда функция $u(x,\ t)$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных $\rho(x)S\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) + f(x,t)$. Если $k = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, то уравнение можно записать в виде $u_{tt} = a^2 u_{xx} + \dfrac{f}{\rho S}$, где $a^2 = \dfrac{k}{\rho S} > 0,\ a = \text{const} > 0,\ [a] = \dfrac{\text{см}}{\text{с}}$. Оно называется *волновым уравнением*, или *уравнением колебаний*.

Если $F(x,\ t) \equiv 0$, а колебания происходят только под действием сил упругости (например, после некоторого первоначального растяжения стержня), то уравнение

$$u_{tt}(x,\ t) = a^2 u_{xx}(x,\ t) \tag{1.12}$$

называется *уравнением свободных колебаний*.

В процессе колебаний на стержень могут действовать силы трения. Если сила трения пропорциональна скорости $u_t(x,\ t)$, то вместо (1.12) получим уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx} - bu_t,\ b = \text{const} > 0$.

Выбором новых независимых переменных x' и t' уравнение (1.12) можно привести к виду $u_{t't'} = u_{x'x'}$ (найдите такие x' и t').

1.1.6. Уравнения поперечных колебаний струны и мембраны. Звуковые волны в пространстве

Рассмотрим *струну* — одномерную упругую однородную нить, которая не сопротивляется изгибу. В невозмущенном состоянии ее можно представить как всю ось Ox в пространстве $Oxyz$ или как ее конечный отрезок $0 \le x \le l$. Струну можно возмутить разными способами: изогнуть, а затем отпустить; ударить, сообщив некоторый распределенный вдоль струны импульс; приложить к струне распределенную вдоль нее поперечную силу; передвигать по определенному закону концы струны; приложить силы к концам струны и т. д.

В любом случае по струне станут распространяться возмущения — по ней побегут волны. Для описания распространения волн введем вектор $\{u_1(x,\,t),\,u_2(x,\,t),\,u_3(x,\,t)\}$, задающий положение в пространстве в момент времени t той точки струны, которая в невозмущенном состоянии имела координаты $(x,\,0,\,0)$. Рассмотрим простейший случай, когда все возмущения и вызывающие их причины лежат только в плоскости Oxz. Тогда достаточно ввести одну скалярную величину $u(x,\,t)$ — смещение в направлении оси Oz в момент времени t той точки струны, которая имела в невозмущенном состоянии координату x на оси Ox. Величина u является *поперечным* смещением в точке x (не будем рассматривать возможные продольные смещения, считая их пренебрежимо малыми). Из-за наличия изгиба в струне возникнут внутренние упругие силы. Предположение о *гибкости* струны означает, что эти силы в каждый момент времени направлены по касательным к ее профилю. Колебания струны будем считать *малыми* и допускающими применение *закона Гука*. В сделанных предположениях величина T упругой силы не зависит от x и t, а ее проекцию на ось Oz можно считать равной $Tu_x(x,\,t)$. Кроме того, сумма проекций всех сил на ось Ox должна быть равна нулю, поскольку рассматриваются только *поперечные колебания* струны.

Пусть в направлении оси Oz на струну действует распределенная внешняя сила с линейной плотностью $f(x,\,t)$ (f — сила, приходящаяся на единицу длины). Выделим участок струны $[x_1,\,x_2]$ и найдем изменение количества движения этого участка в направлении оси Oz в течение времени $[t_1,\,t_2]$. Если ρ — линейная плотность массы струны (для однородной струны $\rho(x) = \text{const}$), то $\rho u_t(x,\,t)\,dx$ — импульс ее участка длиной dx, тогда

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \rho\big(u_t\,(x,t_2) - u_t\,(x,t_1)\big)dx =$$

$$= \int\limits_{t_1}^{t_2} T\big(u_x\,(x_2,t) - u_x\,(x_1,t)\big)dt + \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{x_1}^{x_2} f\,(x,t)\,dx dt.$$

К каждому интегралу в этом равенстве применим формулу среднего значения и разделим равенство на $x_2 - x_1$ и на $t_2 - t_1$. Затем перейдем к пределу при $x_1 \to x$, $x_2 \to x$, $t_1 \to t$, $t_1 \to t$, предполагая существование у функции $u(x,\,t)$ непрерывных вторых производных $u_{xx}(x,\,t)$ и $u_{tt}(x,\,t)$. Тогда получим $u_{tt}(x,\,t) = a^2 u_{xx}(x,\,t) +$

$+ g(x, t)$, где $a^2 = \dfrac{T}{\rho} = \text{const}$, $g(x,t)$ $\dfrac{1}{\rho} f(x,t)$. Полученное дифференциальное уравнение называется уравнением поперечных колебаний однородной струны. Если $f(x, t) \equiv 0$, то его называют уравнением *свободных* колебаний (на струну не действуют внешние силы, движение происходит только под влиянием сил упругости). Постоянная a $\cdot$ () характеризует материал, из которого сделана струна. Оказывается, что a является скоростью распространения волн *вдоль* оси Ox.

Теперь рассмотрим в плоскости Oxy связную область D с границей S. Можно считать ее двумерной однородной невозмущенной мембраной. Возмутим мембрану каким-либо образом. Предположим при этом, что любая точка мембраны, которая в невозмущенном состоянии имела пространственные координаты $(x, y, 0)$, смещается только в направлении оси Oz на величину $u(x, y, t)$ в момент времени t. Для описания распространения волн по мембране сделаем предположения, аналогичные предположениям о поперечных колебаниях струны или о продольных колебаниях стержня. Тогда получим уравнение *малых* свободных поперечных колебаний мембраны $u_{tt}(x, y, t) = a^2(u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t))$. Если на мембрану действует распределенная по ней поперечная внешняя сила, то уравнение колебаний мембраны имеет вид $u_{tt}(x, y, t) = a^2(u_{xx}(x, y, t) + u_{yy}(x, y, t)) + g(x, y, t)$.

Замечание 1.4. Малые упругие *поперечные колебания* стержня с зажатым в тиски концом описываются уравнением $u_{tt}(x, t) + a^2 u_{xxxx}(x, t) = 0$. В двумерном случае (колебания пластинки с закрепленным краем) его аналогом является уравнение $u_{tt}(x, y, t) + a^2 \Delta\Delta u(x, y, t) = 0$. Если для струны и мембраны в *стационарном случае* получаем уравнение Лапласа (или уравнение Пуассона), то для указанных уравнений — ***бигармоническое уравнение*** $\Delta\Delta u(x, y) = 0$ (или $\Delta\Delta u(x, y) = f(x, y)$). ■

Волновым уравнением вида $u_{tt}(M, t) = a^2 \Delta_M u(M, t)$, $M = M(x, y, z)$, можно описать распространение звука в пространстве. Звучащее тело — струна, мембрана, духовой музыкальный инструмент или любой другой источник звука — вызывает *продольные колебания* воздуха: его сжатия и разрежения (колебания частиц происходят вдоль направления распространения волны; скорость распространения волны $a = 330 \dfrac{\text{м}}{\text{с}}$). При этом высота

звука зависит от частоты, а его интенсивность — от амплитуды колебаний. Звуковые волны можно описать, если считать воздух упругой средой, для которой справедлив закон Гука, и использовать принцип волнового движения Гюйгенса. Согласно принципу Гюйгенса каждый элемент поверхности, которой достигла в данный момент волна, является центром элементарных волн, огибающая которых будет волновой поверхностью в «следующий» момент времени. При этом обратные элементарные волны во внимание не принимаются. Так можно прийти к волновому уравнению, описывающему *малые колебания* в пространстве, приняв, что ему подчиняется возмущение давления воздуха.

Замечание 1.5. Физические явления в газах, свойства их *течений* гораздо сложнее акустических волновых процессов. В сжимаемых средах могут распространяться со сверхзвуковой скоростью *ударные волны* — узкие области, в которых происходит резкое увеличение плотности, давления и скорости. Реальные газы и жидкости обладают *вязкостью* — внутренним трением, которое оказывает сопротивление перемещению одного слоя относительно другого. Реальные течения существенно *трехмерны*, в них могут возникать *пограничные слои* (области течения у поверхности обтекаемого тела или на границе потоков, в которых резко изменяется скорость или температура) и *турбулентности* (многочисленные вихри, хаотическим образом изменяющие гидродинамические и термодинамические характеристики среды). Описание процессов и явлений в газах и жидкостях основано на построении уравнений, выражающих законы сохранения массы, импульса и энергии, а также на уравнениях состояния. При этом всегда делаются модельные предположения: детально учитываются особенности конкретных течений и значения характеризующих среду параметров. ■

1.1.7. Уравнение неразрывности. Уравнение потенциального течения жидкости

Пусть через ограниченную область D пространства $Oxyz$ протекает жидкость (газ). Чтобы выразить законы движения жидкости на языке математического анализа, надо считать ее движущейся сплошной средой. Охарактеризуем ее в момент времени t вектором скорости $\mathbf{v}(M,t)$ и объемной плотностью массы $\rho(M,t)$ в каждой точке $M = M(x, y, z)$ области D. В момент времени t

в D содержится жидкость массы $\iiint_D \rho(M,t)\,dxdydz$ (ее зависимость от времени может объясняться, например, тем, что через D протекает смесь жидкостей переменных парциальных концентраций). Границу области D будем считать гладкой (или кусочно-гладкой) замкнутой поверхностью S; $\mathbf{n}(P)$ — вектор *внешней нормали* к S в точке $P \in S$, $|\mathbf{n}(P)| = 1$. В момент времени t жидкость пересекает поверхность S, *покидая* область D, со скоростью $\iint_S \rho(P,t)\big(\mathbf{v}(P,t),\mathbf{n}(P)\big)\,dS_P \left[\frac{\text{г}}{\text{с}}\right]$ ($(\mathbf{v},\,\mathbf{n})$ — нормальная составляющая скорости $\mathbf{v}$; $(\mathbf{v},\,\mathbf{n})\,dS$ — объем жидкости, пересекающей dS в единицу времени; $\rho(\mathbf{v},\,\mathbf{n})\,dS$ — ее масса; $\rho\mathbf{v}$ — вектор плотности потока массы). Если в области D нет источников или поглотителей жидкости, то изменение массы в D в промежутке времени $[t_1,\,t_2]$ обусловлено только потоком жидкости через S:

$$\iiint_D \big[\rho(M,t_2) - \rho(M,t_1)\big]\,dxdydz =$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} \iint_S \rho(P,t)\big(\mathbf{v}(P,t),\mathbf{n}(P)\big)\,dS_P dt. \qquad (1.13)$$

Формула Остроградского $\iint_S (\rho\mathbf{v},\mathbf{n})\,dS = \iiint_D \operatorname{div}_M(\rho\mathbf{v})\,dxdydz$ для векторного поля $\rho\mathbf{v}$ позволяет записать (1.13) в виде

$$\iiint_D \big[\rho(M,t_2) - \rho(M,t_1)\big]\,dxdydz +$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} \iiint_D \operatorname{div}_M\big(\rho(M,t)\mathbf{v}(M,t)\big)\,dxdydzdt = 0. \qquad (1.14)$$

Баланс массы (1.13) справедлив в области D для произвольной подобласти D' с кусочно-гладкой границей. Запишем (1.14) для D', к каждому из интегралов $\int_{t_1}^{t_2}$ и $\iiint_{D'}$ применим формулу среднего значения, затем разделим полученное равенство на объем области D' и на $t_2 - t_1$. Выполним предельный переход, стягивая D' в точку M и устремляя $t_1 \to t$, $t_2 \to t$. Тогда получим

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \operatorname{div}_M\left(\rho(M,t)\mathbf{v}(M,t)\right) = 0 \qquad (1.15)$$

— дифференциальное ***уравнение неразрывности*** (выведено в предположении, что функция ρ непрерывна и имеет непрерывные производные, а для векторного поля $\rho\mathbf{v}$ справедлива формула Остроградского). Уравнение (1.15) выражает в дифференциальной форме закон сохранения массы и является одним из основных уравнений гидро- и газодинамики.

Если в области D распределены источники (или поглотители) жидкости, то их действие необходимо учесть в балансе массы. Интенсивность мгновенных источников можно охарактеризовать их объемной плотностью $F(M,\ t)$: в промежутке времени $[t_1,\ t_2]$ источники выделят в D массу $\int\limits_{t_1}^{t_2}\iiint\limits_{D} F(M,t)\,dxdydzdt$, которую теперь надо прибавить к правой части (1.13). Предполагая, что функция F непрерывна по M и по t, вместо (1.15) получим

$$\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} + \operatorname{div}_M\left(\rho(M,t)\mathbf{v}(M,t)\right) = F(M,t). \qquad (1.16)$$

Если жидкость несжимаема, т. е. $\rho = \text{const}$, то (1.15) имеет вид $\operatorname{div}_M\mathbf{v} = 0$ и выражает отсутствие источников в области D (например, вода слабо поддается сжатию; $\rho = \text{const}$ можно считать ***уравнением состояния*** воды). Если, кроме того, в течении жидкости нет вихрей, т. е. $\operatorname{rot}_M\mathbf{v} = 0$ в области D, то в D можно ввести такую скалярную функцию $u(M)$, что $\mathbf{v} = -\operatorname{grad}u$. Течение при этом называют *потенциальным*, а $u(M)$ — потенциалом скорости. Тогда $u(M)$ в области D удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta_M u \equiv \operatorname{div}_M\operatorname{grad}_M u = 0$. Если же $\rho = \text{const}$ и функция $F(M)$ не равна тождественно нулю, то $u(M)$ удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta_M u = -\dfrac{F}{\rho}$. Очевидно, что потенциал скорости может удовлетворять уравнению Лапласа только в том случае, если масса втекающей в D жидкости (в единицу времени) равна массе, вытекающей из D через границу области.

Замечание 1.6. Уравнение неразрывности выведено в результате наблюдения за точками M физического пространства $Oxyz$. Через точку $M(x,\ y,\ z)$ в различные моменты времени проходят разные частицы жидкости; $\mathbf{v}(M,\ t)$ — скорость частицы, которая в момент времени t проходит точку M. Области D и D' —

фиксированные части пространства $Oxyz$. Такое описание течения было предложено Л. Эйлером, который рассматривал жидкость (газ) как сплошную легко деформируемую материю и математически описал ее движение. Независимые переменные x, y, z, t называются ***переменными Эйлера***.

Возможен другой подход, при котором наблюдение ведется за каждой частицей среды, изучается ее движение в течение некоторого времени — подход Лагранжа. В качестве ***переменных Лагранжа*** наряду со временем t можно выбрать, например, положения $M_0^\alpha = M_0^\alpha(X,Y,Z)$ каждой частицы с «номером» α в момент времени $t = 0$ в неподвижной системе координат $Oxyz$. Тогда положение M_t^α той же частицы α в момент времени $t > 0$ определяется некоторым законом движения $M_t^\alpha = \Im\left(M_0^\alpha, t\right)$, где функция $\Im$ в каждый момент времени t устанавливает взаимнооднозначное соответствие $M_0^\alpha \leftrightarrow M_t^\alpha$, а при фиксированном α дает траекторию движения частицы с «номером» α. Заметим, что мы не отказываемся от предположения о сплошности среды: α только выделяет ее точку в момент времени $t = 0$. В качестве такого «номера» α как раз и выбирают, например, координаты X, Y, Z фиксированной частицы в момент времени $t = 0$.

Подлежащий определению закон движения $\Im$ устанавливает связь между лагранжевыми X, Y, Z и эйлеровыми x, y, z координатами частицы:

$$\begin{cases} x = x(X,Y,Z,t); \\ y = y(X,Y,Z,t); \\ z = z(X,Y,Z,t) \end{cases}$$

— эйлеровы координаты в момент времени t той частицы, которая в момент $t = 0$ находилась в точке $(X,\ Y,\ Z)$ пространства $Oxyz$. При таком способе описания вектор $\mathbf{V}(X,\ Y,\ Z,\ t)$ (с компонентами $V^{(x)}$, $V^{(y)}$, $V^{(z)}$ в системе $Oxyz$) при фиксированных X, Y, Z означает скорость перемещения выделенной частицы жидкости. В момент времени t эйлеровы координаты этой частицы

$$\begin{cases} x = X + \int\limits_0^t V^{(x)}(X,Y,Z,\tau)\,d\tau; \\ y = Y + \int\limits_0^t V^{(y)}(X,Y,Z,\tau)\,d\tau; \\ z = Z + \int\limits_0^t V^{(z)}(X,Y,Z,\tau)\,d\tau, \end{cases}$$

$\mathbf{V}(X,\ Y,\ Z,\ t) = \mathbf{v}(x,\ y,\ z,\ t)$. Если какую-либо величину, например, $\rho = \rho(M,\ t)$ $(M = M(x,\ y,\ z))$ необходимо выразить в лагранжевых переменных, то ее производная по времени в лагранжевых переменных будет иметь вид

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathrm{grad}_M\rho, \mathbf{v}),$$

где $\dfrac{d}{dt}$ — ***полная производная*** по времени вдоль траектории частицы (определяется как нестационарностью процесса, так и неоднородностью распределения значений ρ в пространстве).

Если при движении жидкости ни в один момент времени не образуются полости, т.е. $\rho(M,\ t) \neq 0$, то переход от эйлеровой системы координат $x,\ y,\ z$ к лагранжевой $X,\ Y,\ Z$ в каждый момент времени является невырожденной заменой переменных; ее якобиан $\Delta(t) = \mathfrak{D}(x,\ y,\ z)/\ \mathfrak{D}(X,\ Y,\ Z) \neq 0$.

Рассмотрим в области D в момент времени $t = 0$ произвольную подобласть $D'(0)$, образованную фиксированными частицами. С изменением времени эта «жидкая область» перемещается вместе со средой, изменяя свою форму и положение. В момент времени $t > 0$ она превратится в область $D'(t)$. При этом количество частиц в рассматриваемой «жидкой области» не меняется, т.е. масса в ней остается прежней (считаем, что в D нет источников):

$$\iiint\limits_{D'(t)} \rho(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{D'(0)} \rho(x,y,z)\,dxdydz$$

— закон сохранения массы, записанный в подходе Лагранжа (интегрирование по $dxdydz$ ведется здесь пока в переменных Эйлера). При переходе к переменным Лагранжа элемент объема $dxdydz = |\Delta(t)|\,dXdYdZ$, а интегрирование по $D'(t)$ надо заменить на интегрирование по $D'(0)$. Закон сохранения массы означает, что полная производная

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{D'(t)} \rho(x,y,z,t)\,dxdydz = \frac{d}{dt}\iiint\limits_{D'(0)} \rho(X,Y,Z,t)\big|\Delta(t)\big|\,dXdYdZ =$$

$$= \iiint\limits_{D'(0)} \frac{d}{dt}\big(\rho(X,Y,Z,t)\big|\Delta(t)\big|\big)\,dXdYdZ = 0.$$

В силу произвольности выбора в D подобласти $D'(0)$ получаем дифференциальное уравнение неразрывности в переменных Лагранжа: $\frac{d}{dt}\left(\rho(X,Y,Z,t)\left|\Delta(t)\right|\right) = 0$. ■

Замечание 1.7. Уравнение продольных колебаний стержня было записано в переменных Лагранжа. ■

Пример 1.6. Уравнение неразрывности, аналогичное по смыслу уравнению (1.15), появляется и в другой физической науке, в квантовой механике*. Квантовую микрочастицу (например, электрон) нельзя описать одновременным и точным заданием ее координат $M(x, y, z)$ и скорости $\mathbf{v}(M,t)$. Состояние такой частицы понимают как *волновую функцию* $\Psi(M, t)$, которая принимает комплексные значения. Смысл волновой функции состоит в том, что для ограниченной области D пространства $Oxyz$ интеграл $\iiint\limits_D \left|\Psi(M,t)\right|^2 dxdydz$ представляет собой в*ероятность* нахождения частицы в области D; $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left|\Psi(M,t)\right|^2 dxdydz = 1$.

Пусть частица массы m находится во внешнем поле сил; $U(M)$ — ее потенциальная энергия. В квантовой механике постулируется, что волновая функция такой частицы удовлетворяет ***уравнению Шредингера***:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(M,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_M\Psi(M,t) + U(M)\Psi(M,t),$$

где Δ_M — оператор Лапласа; i — мнимая единица; $\hbar$ — постоянная Планка (фундаментальная физическая постоянная).

Вычислим производную по времени от вероятности нахождения частицы в области D. Учтем для этого, что $\left|\Psi\right|^2 = \Psi\bar{\Psi}$ (черта означает комплексное сопряжение), и что функция $\bar{\Psi}$ удовлетворяет уравнению

$$\overline{i\hbar\frac{\partial\Psi(M,t)}{\partial t}} = -i\hbar\frac{\partial\bar{\Psi}(M,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_M\bar{\Psi}(M,t) + U(M)\bar{\Psi}(M,t).$$

Кроме того, используем тождество $\Psi\Delta_M\bar{\Psi} - \bar{\Psi}\Delta_M\Psi \equiv$ $\equiv \mathrm{div}_M\left(\Psi\mathrm{grad}_M\bar{\Psi} - \bar{\Psi}\mathrm{grad}_M\Psi\right)$(проверьте!). Тогда

---

* См.: *Ландау Л.Д.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. — Гл. 3, § 19.

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_D \left|\Psi(M,t)\right|^2 dxdydz = \iiint\limits_D \left[\Psi\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial t} + \overline{\Psi}\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right]dxdydz =$$

$$= \frac{i}{\hbar}\iiint\limits_D \left[\Psi\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\overline{\Psi} + U\overline{\Psi}\right) - \overline{\Psi}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi + U\Psi\right)\right]dxdydz =$$

$$= -\frac{i\hbar}{2m}\iiint\limits_D \left[\Psi\Delta\overline{\Psi} - \overline{\Psi}\Delta\Psi\right]dxdydz = -\iiint\limits_D \operatorname{div}_M \mathbf{j}(M,t)\,dxdydz,$$

где введено обозначение $\mathbf{j}(M,t) = \dfrac{i\hbar}{2m}\left(\Psi\operatorname{grad}_M\overline{\Psi} - \overline{\Psi}\operatorname{grad}_M\Psi\right)$. Если область D имеет кусочно-гладкую границу S, то по формуле Остроградского получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_D |\Psi|^2\,dxdydz = -\iint\limits_S \left(\mathbf{j}(P,t),\mathbf{n}(P)\right)dS_P,$$

где $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к поверхности S в ее точке P.

Тем самым вектор $\mathbf{j}$ можно рассматривать как *вектор плотности потока вероятности*: интеграл $\iint\limits_S (\mathbf{j},\mathbf{n})\,dS$ есть вероятность того, что в течение единицы времени частица пересечет поверхность S. *Плотность вероятности* $|\Psi(M,\,t)|^2$ и векторное поле $\mathbf{j}(M,\,t)$ удовлетворяют уравнению неразрывности в области D:

$$\frac{\partial\left(\left|\Psi(M,t)\right|^2\right)}{\partial t} + \operatorname{div}_M \mathbf{j}(M,t) = 0. \ \blacksquare$$

1.1.8. Система уравнений Максвелла

Уравнения математической физики описывают (в виде интегральных или дифференциальных соотношений) не только явления и процессы, происходящие в *веществе*, но и *физические поля*. Понятие поля было введено М. Фарадеем для описания электрических и магнитных явлений: взаимодействующие электрически заряженные частицы создают в каждой точке окружающего их пространства особое состояние — поле сил, которое и осуществляет взаимодействие между частицами. Поля могут существовать и независимо от создавших их частиц (например, электромагнитные волны).

Электромагнитное поле в сплошной среде описывается четырьмя векторными полями: напряженностью электрического поля $\mathbf{E}(M, t)$, электрической индукцией $\mathbf{D}(M, t)$, напряженностью магнитного поля $\mathbf{H}(M, t)$ и магнитной индукцией $\mathbf{B}(M, t)$, которые считаются непрерывными и дифференцируемыми функциями точки $M = M(x, y, z)$ и времени t. Источниками электромагнитного поля являются электрические заряды, распределенные в пространстве с объемной плотностью $\rho(M, t)$, и электрические токи, которые характеризуются векторным полем плотности электрического тока $\mathbf{j}(M, t)$ ($|\mathbf{j}|$ — заряд, пересекающий в единицу времени единичную площадку, перпендикулярную направлению движения заряженных частиц). Электромагнитное поле описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка — ***уравнениями Максвелла.*** В системе единиц Гаусса она имеет вид

$$\operatorname{rot}_M \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{1.17}$$

$$\operatorname{rot}_M \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1.18}$$

$$\operatorname{div}_M \mathbf{B} = 0, \tag{1.19}$$

$$\operatorname{div}_M \mathbf{D} = 4\pi\rho. \tag{1.20}$$

Здесь $c = 3 \cdot 10^{10} \dfrac{\text{см}}{\text{с}}$ — скорость распространения электромагнитных взаимодействий (скорость света) в вакууме.

Электромагнитные свойства среды и ее состояние описываются уравнениями состояния. Например, в вакууме $\mathbf{D} \equiv \mathbf{E}$ и $\mathbf{B} \equiv \mathbf{H}$, а в покоящейся изотропной среде $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, где ε — диэлектрическая проницаемость; μ — магнитная проницаемость; σ — удельная электрическая проводимость среды. Равенство $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ выражает закон Ома.

Замечание 1.8. Уравнения Максвелла могут быть записаны и в интегральной форме. ■

Выведем некоторые следствия из уравнений (1.17) — (1.20).

Из равенства (1.20) выразим $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = \dfrac{1}{4\pi}\operatorname{div}\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, а из (1.17) $\dfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = c\operatorname{rot}\mathbf{H} - 4\pi\mathbf{j}$. Учтем, что $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{H} \equiv 0$. Тогда получим

уравнение неразрывности $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, которое выражает ***закон сохранения электрического заряда.***

Рассмотрим электромагнитное *поле в вакууме* в области пространства, не содержащей источников поля ($\rho \equiv 0$, $\mathbf{j} \equiv 0$):

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{1.21}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{1.22}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \tag{1.23}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0. \tag{1.24}$$

Применим операцию rot к уравнению (1.21): $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{E}$.

Из векторного анализа известно, что $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} \equiv \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{H} - \Delta\mathbf{H}$, где $\Delta\mathbf{H}$ — вектор (если в прямоугольной системе координат $Oxyz$ вектор $\mathbf{H}$ имеет компоненты $\mathbf{H} = \left\{H^{(x)}(M,t), H^{(y)}(M,t), H^{(z)}(M,t)\right\}$, то $\Delta\mathbf{H} = \left\{\Delta_M H^{(x)}(M,t), \Delta_M H^{(y)}(M,t), \Delta_M H^{(z)}(M,t)\right\}$). В нашем случае $\operatorname{div}\mathbf{H} \equiv 0$, поэтому $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H} = -\Delta\mathbf{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{E}$. Тогда из (1.22) получаем *волновое уравнение* для $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H}_{tt} = c^2\Delta\mathbf{H}.$$

Аналогично получается уравнение $\mathbf{E}_{tt} = c^2\Delta\mathbf{E}$.

Наконец, заметим, что в случае *электростатики* ($\rho = \rho(M)$, $\mathbf{j} \equiv 0$, $\mathbf{H} \equiv 0$, $\mathbf{B} \equiv 0$) уравнение (1.18) $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ означает, что электростатическое поле $\mathbf{E}$ потенциально, т.е. его можно охарактеризовать скалярной функцией $u(M)$ — электростатическим потенциалом, связанным с $\mathbf{E}$ соотношением $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}u$. Из (1.20) получаем для $u(M)$ ***уравнение Пуассона***: $\operatorname{div}\operatorname{grad}u(M) = -\dfrac{4\pi}{\varepsilon}\rho(M)$.

Замечание 1.9. В общем случае вместо $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ можно ввести векторный потенциал $\mathbf{A}(M,t)$ и скалярный потенциал $u(M,\ t)$, через которые выражаются $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$: $\mathbf{B} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}u - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$.

Потенциалы $\mathbf{A}$ и u определяются неоднозначно: если вместо них выбрать $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} v(M, t)$, $u' = u - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial v}{\partial t}$, то векторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ не изменятся (проверьте!). ■

1.1.9. Уравнение Гельмгольца

Уравнением Гельмгольца называется уравнение вида $\Delta v(M) + cv(M) = 0$ (или неоднородное уравнение вида $\Delta v(M) + cv(M) = -f(M)$), где $c = \text{const}$; $M = M(x, y, z)$ в пространственном случае или $M = M(x, y)$ в плоском случае. При $c = 0$ уравнение Гельмгольца является уравнением Лапласа (или уравнением Пуассона). При $c < 0$ его принято записывать в виде

$$\Delta v(M) - k^2 v(M) = (0 \text{ или } -f(M)), \tag{1.25}$$

а при $c > 0$ — в виде

$$\Delta v(M) + k^2 v(M) = (0 \text{ или } -f(M)), \tag{1.26}$$

где $k = \text{const} > 0$ (обычно именно (1.26) называют уравнением Гельмгольца).

Свойства решений уравнений (1.25) и (1.26) различны. Это можно проследить уже для одномерного случая, когда $v = v(x)$. Уравнению $v_{xx} - k^2 v = 0$ соответствует характеристическое уравнение $p^2 - k^2 = 0$, которое имеет вещественные корни $p_{1,2} = \pm k$; им отвечают линейно независимые решения $v_1(x) = \mathrm{e}^{kx}$, $v_2(x) = \mathrm{e}^{-kx}$. Уравнению $v_{xx} + k^2 v = 0$ соответствует характеристическое уравнение $p^2 + k^2 = 0$, которое имеет мнимые корни $p_{1,2} = \pm ik$ (i — мнимая единица); им отвечают линейно независимые комплекснозначные решения $v_1(x) = \mathrm{e}^{ikx}$, $v_2(x) = \overline{v_1(x)} = \mathrm{e}^{-ikx}$, либо пара линейно независимых вещественных решений $\cos(kx) = \operatorname{Re} v_1(x)$, $\sin(kx) = \operatorname{Im} v_1(x)$ (напомним формулу Эйлера: $\mathrm{e}^{ikx} = \cos(kx) + i\sin(kx)$).

Физическое значение имеет уравнение (1.26), описывающее *установившиеся колебания*. Пусть в волновом уравнении $u_{tt}(M, t) = a^2 \Delta_M u(M, t) + g(M, t)$ функция g периодична по времени — действует внешняя периодическая сила. Обозначим через ω ее частоту, а зависящую от точки M амплитуду величины g — через $a^2 f(M)$: $g(M, t) = a^2 f(M)\cos(\omega t)$. В некоторых случаях колебания, описываемые функцией $u(M, t)$, будут происходить по такому же гармоническому закону. Установившиеся колебания

(например, *стоячая волна*) — это колебания с той же частотой ω и некоторой амплитудой $v(M)$: $u(M, t) = v(M)\cos(\omega t)$. Подставляя такие функции u и g в волновое уравнение, получим относительно $v(M)$ уравнение $\Delta v(M) + \dfrac{\omega^2}{a^2} v(M) = -f(M)$. Амплитуда $v(M)$ свободных колебаний ($g \equiv 0$), имеющих частоту ω, удовлетворяет уравнению $\Delta v(M) + \dfrac{\omega^2}{a^2} v(M) = 0$.

Стоячую волну можно рассматривать как сумму двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу. Стоячие волны могут возникать в области D только при полном отражении бегущих волн от ее границы и при отсутствии затухания в среде; в противном случае появляются еще и бегущие волны, которые могут распространяться и от источника колебаний.

Пример 1.7. Стоячие волны возникают в виде плоских волн внутри заполненной воздухом звучащей органной трубы, если один ее конец закрыт идеально твердой стенкой, а другой открыт. ■

Пример 1.8. Пусть n — фиксированное натуральное число. Функция $u(x,t) = \sin\left(\dfrac{\pi n}{l} x\right)\cos\left(\dfrac{\pi n a}{l} t\right)$ удовлетворяет уравнению поперечных свободных колебаний струны $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ ($D = \{0 < x < l\}$), концы которой закреплены: $u(0, t) = u(l, t) = 0$. Здесь $\omega = \dfrac{\pi n a}{l}$, а амплитуда $v(x) = \sin\left(\dfrac{\pi n}{l} x\right)$ удовлетворяет уравнению $v_{xx} + \dfrac{\omega^2}{a^2} v = 0$ (проверьте!); $u(x, t)$ — стоячая волна. ■

Пример 1.9. Пусть m и n — фиксированные натуральные числа.

Функция $u(x,y,t) = \sin\left(\dfrac{\pi m}{l_1} x\right)\sin\left(\dfrac{\pi n}{l_2} y\right)\cos\left(\sqrt{\left(\dfrac{\pi m}{l_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi n}{l_2}\right)^2}\, at\right)$

удовлетворяет уравнению поперечных свободных колебаний прямоугольной мембраны $u_{tt} = a^2 \Delta_{x,y} u$ ($D = \{0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$), края которой закреплены. Здесь $\omega = \sqrt{\left(\dfrac{\pi m}{l_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\pi n}{l_2}\right)^2}\, a$;

амплитуда $v(x,y)=\sin\left(\dfrac{\pi m}{l_1}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi n}{l_2}y\right)$ удовлетворяет уравнению $\Delta v+\dfrac{\omega^2}{a^2}v=0$ (проверьте!); $u(x,\,y,\,t)$ — стоячая волна. ■

Замечание 1.10. Наряду с периодическими колебаниями $u(M,\,t)=v(M)\cos(\omega t)$ можно рассматривать и колебания, подчиняющиеся закону $v(M)\sin(\omega t)$. Удобно ввести комплекснозначную функцию $v(M)(\cos(\omega t)+i\sin(\omega t))=v(M)\mathrm{e}^{i\omega t}$ и считать именно ее удовлетворяющей волновому уравнению $u_{tt}=a^2\Delta_M u$. ■

Пример 1.10. В сферической системе координат r, θ, φ в пространстве в случае центральной симметрии относительно начала координат $u(M,\,t)\equiv u(r,\,t)=v(r)\mathrm{e}^{i\omega t}$, и однородное уравнение Гельмгольца имеет вид $(r>0)$

$$\frac{1}{r}\frac{d^2\left(rv(r)\right)}{dr^2}+k^2v(r)=0. \tag{1.27}$$

Оно является обыкновенным дифференциальным уравнением относительно функции $rv(r)$:

$$\frac{d^2\left(rv(r)\right)}{dr^2}+k^2\left(rv(r)\right)=0,$$

которое имеет линейно независимые решения $rv(r)=\mathrm{e}^{ikr}$, $rv(r)=\mathrm{e}^{-ikr}$.

Следовательно, уравнение (1.27) имеет комплекснозначные решения $v_1(r)=\dfrac{\mathrm{e}^{ikr}}{r}$, $v_2(r)=\overline{v_1(r)}=\dfrac{\mathrm{e}^{-ikr}}{r}$ (или два вещественных решения $\dfrac{\cos(kr)}{r}=\operatorname{Re}v_1(r)$, $\dfrac{\sin(kr)}{r}=\operatorname{Im}v_1(r)$).

Функция $u_1(r,t)=\dfrac{\mathrm{e}^{i(\omega t+kr)}}{r}$ имеет смысл бегущей сферической волны, *сходящейся* в начало координат из бесконечности. Она обычно не имеет физического содержания. Функция $u_2(r,t)=\dfrac{\mathrm{e}^{i(\omega t-kr)}}{r}$ имеет смысл бегущей сферической волны, *расходящейся* от начала координат в бесконечность. Такая волна создается точечным источником колебаний в точке $r=0$. (Выясните, что будет, если вместо $v(r)\mathrm{e}^{i\omega t}$ взять функцию $v(r)\mathrm{e}^{-i\omega t}$). ■

Пример 1.11. В квантовой механике состояние свободной частицы (на которую не действуют внешние силы) массы m опи-

сывается волновой функцией $\Psi(M, t)$, удовлетворяющей уравнению Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_M\Psi.$$

Состояние, которому можно приписать определенное значение энергии E частицы, называется стационарным. Его волновая функция имеет вид $\Psi(M,t) = v(M)\mathrm{e}^{-i\frac{E}{\hbar}t}$, $\left[\frac{E}{\hbar}\right] = \frac{1}{\mathrm{c}}$. Для стационарного состояния свободной частицы с энергией $E \geq 0$ функция $v(M)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\frac{\hbar^2}{2m}\Delta v + Ev = 0$ (проверьте!). ■

Уравнение Гельмгольца (1.26) возникает в большом числе теоретических и прикладных задач:

- в акустике (описание излучения звука колеблющимися телами, распространение звука);
- в теории электромагнитных волн (излучение электромагнитных волн, их распространение в резонаторах, теория антенн);
- в теории волноводов;
- в теории дифракции волн.

1.1.10. Уравнение Кортевега—де Фриза

В последующих главах будут подробно изучены задачи для уравнений теплопроводности и диффузии, уравнений Лапласа, Пуассона, для волнового уравнения. Это *линейные* относительно искомой функции и ее производных уравнения. Многие явления и процессы, изучаемые в современной математической физике, невозможно описать столь просто; они моделируются разнообразными *нелинейными уравнениями*. Одно из наиболее известных нелинейных уравнений — уравнение Кортевега—де Фриза (КдФ), которое в XX в. привело к созданию новых методов математической физики.

На мелководье может распространяться длинная уединенная волна неизменной формы. Такая волна $u = u(x, t)$, бегущая вдоль оси Ox (t — время), описывается в специально выбранных переменных u, x, t уравнением КдФ:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Одним из частных его решений является функция $u(x,t) = 3a\Big/\operatorname{ch}^2\left[\dfrac{\sqrt{a}}{2}(x-at-x_0)\right]$, $a=\text{const}>0$, $x_0=\text{const}$ (напомним, что $\operatorname{ch}\alpha = \dfrac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}$). Такое решение называется ***солитоном*** — частицеподобной уединенной волной. Скорость a движения солитона вдоль оси Ox пропорциональна его амплитуде $3a$. Замечательно, что нелинейное уравнение КдФ имеет решение, которое при больших временах ($t\to-\infty$ или $t\to+\infty$) является суммой двух солитонов. Пусть в «достаточно давний» момент времени ($t\sim-\infty$) два солитона с разными наборами постоянных a и x_0 двигались в направлении оси Ox на большом расстоянии друг от друга, причем меньшая волна находилась справа. Некоторое время спустя волны начинают взаимодействовать: бóльшая поглощает меньшую. Затем волны снова разделяются и постепенно (при $t\to+\infty$) восстанавливают свою первоначальную форму, а следовательно, и скорость. Все взаимодействие сводится только к сдвигу центров двух волн по сравнению со свободным движением каждой из них. Теперь бóльшая волна находится справа, и волны удаляются друг от друга из-за различия значений их скоростей...

1.2. Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Приведение их к канонической форме

1.2.1. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка

Дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка называется уравнение, имеющее хотя бы одну производную второго порядка от неизвестной функции $u(x_1, \ldots, x_n)$ и не содержащее производных более высокого порядка. Производные функции u будем как и в п. 1.1 записывать в виде $u_{x_i} = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{x_ix_j} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$; $x_1, \ldots, x_n$ — действительные переменные;

$$\Phi\left(x_1,\ldots,x_n,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n},u_{x_1x_1},u_{x_1x_2},\ldots,u_{x_nx_n}\right)=0 \qquad (1.28)$$

— общий вид такого уравнения. Здесь предполагается, что заданная действительнозначная функция Φ имеет производные

$\dfrac{\partial \Phi}{\partial u_{x_i x_j}}$, причем $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial u_{x_i x_j}}\right)^2 \not\equiv 0$. Уравнение (1.28), вообще говоря, нелинейно относительно функции u и ее производных. Если (1.28) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + F\left(x_1, \ldots, x_n, u, u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}\right) = 0, \qquad (1.29)$$

где $a_{ij} = a_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ — заданные действительнозначные функции, то уравнение называется *линейным относительно старших производных*. Именно уравнения вида (1.29) и будем классифицировать.

1.2.2. Классификация уравнений, линейных относительно старших производных, с двумя независимыми переменными

Опишем подробно классификацию уравнений (1.29) в случае двух независимых переменных, обозначив их через x и y:

$$\begin{gathered} a_{11}(x,\ y)u_{xx} + 2a_{12}(x,\ y)u_{xy} + a_{22}(x,\ y)u_{yy} + \\ + F(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y) = 0, \\ u = u(x,\ y). \end{gathered} \qquad (1.30)$$

Предположим, что коэффициенты при старших производных непрерывны и нигде не обращаются в нуль одновременно. Выполним некоторую невырожденную замену независимых переменных $\begin{cases} \xi = \varphi(x,y), \\ \eta = \psi(x,y). \end{cases}$ Тогда искомая функция примет вид $u = u_1(\xi(x,\ y), \eta(x,\ y))$. Выразим частные производные u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} в новых переменных:

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

$$u_{xx} = \left(u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2\right) + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx},$$

$$u_{xy} = \left(u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y\right) + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy},$$

$$u_{yy} = \left(u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_{yy}^2\right) + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.$$

Найдем зависимость переменных x, y от новых независимых переменных ξ, η и подставим найденные выражения для функции

u и ее производных в уравнение (1.30). Тогда оно будет иметь вид

$$\overline{a}_{11}(\xi,\eta)u_{\xi\xi}+2\overline{a}_{12}(\xi,\eta)u_{\xi\eta}+\overline{a}_{22}(\xi,\eta)u_{\eta\eta}+\overline{F}\left(\xi,\eta,u,u_{\xi},u_{\eta}\right)=0,$$

где действительные коэффициенты при старших производных $\overline{a}_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2$, $\overline{a}_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)+$ $+a_{22}\xi_y\eta_y$, $\overline{a}_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2$ и действительная функция $\overline{F}$ выражены в переменных ξ, η.

Подберем такую замену независимых переменных, при которой уравнение (1.30) будет приведено к наиболее простому виду. Под этим подразумевается, что уравнение (1.30) с *переменными* коэффициентами при старших производных постараемся преобразовать в *уравнение с постоянными коэффициентами* при старших производных. При этом нас не будет интересовать, станет ли $\overline{F}$ более сложным выражением, чем F. Зафиксируем точку $(x,\,y)$ и поставим в соответствие уравнению (1.30) квадратичную форму $Q=a_{11}(x,y)q_1^2+2a_{12}(x,y)q_1q_2+a_{22}(x,y)q_2^2$ от независимых переменных q_1, q_2. Симметричную матрицу коэффициентов квадратичной формы $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $a_{12}=a_{21}$, приведем невырожденным линейным преобразованием B к диагональному виду. Это значит, что после преобразования переменных $\mathbf{q}=B\mathbf{p}$, $\mathbf{q}=\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix}$, $\mathbf{p}=\begin{pmatrix}p_1\\ p_2\end{pmatrix}$, квадратичная форма примет канонический вид $Q=\alpha_1p_1^2+\alpha_2p_2^2$ в новых независимых переменных p_1, p_2. Можно выбрать такое преобразование B, что коэффициенты α_1 и α_2 будут равны по модулю единице или нулю (такой вид квадратичной формы называется нормальным).

Закон инерции квадратичных форм утверждает, что число положительных и число отрицательных членов в каноническом виде не зависит от способа приведения. Это позволяет провести классификацию уравнений вида (1.30) и подобрать требуемую замену переменных $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y),\\ \eta=\psi(x,y).\end{cases}$

Уравнение (1.30) называется уравнением *параболического типа* в точке $(x,\,y)$, если один из коэффициентов α_1, α_2 в каноническом виде квадратичной формы Q равен нулю. Тогда другой коэффициент можно выбрать по модулю равным единице. Для

уравнения параболического типа в точке $(x,\ y)$ выражение $D(x,y)=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$.

Уравнение (1.30) называется уравнением *эллиптического типа* в точке $(x,\ y)$, если коэффициенты α_1 и α_2 в каноническом виде квадратичной формы Q имеют одинаковые знаки. Их можно выбрать одновременно равными либо $+1$, либо -1. Для уравнения эллиптического типа в точке $(x,\ y)$ $D(x,y)=$ $=a_{12}^2-a_{11}a_{22}<0$.

Уравнение (1.30) называется уравнением *гиперболического типа* в точке $(x,\ y)$, если α_1 и α_2 в каноническом виде квадратичной формы Q имеют разные знаки. Их можно выбрать равными $+1$ и -1. Для уравнения гиперболического типа в точке $(x,\ y)$ $D(x,y)=a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$.

Теорема 1.1. Пусть новые независимые переменные ξ, η выбраны так, что $\xi_x=b_{11}$, $\xi_y=b_{21}$, $\eta_x=b_{12}$, $\eta_y=b_{22}$, где b_{ij} — элементы матрицы B, с помощью которой квадратичная форма Q была приведена к каноническому виду. Тогда коэффициенты при вторых производных функции $u(x,\ y)$ в уравнении (1.30) будут преобразованы при замене $\begin{cases}\xi=\varphi(x,y)\\ \eta=\psi(x,y)\end{cases}$ так же, как коэффициенты квадратичной формы Q при замене $\mathbf{p}=B^{-1}\mathbf{q}$.

Доказательство. Если в переменных q_1, q_2 квадратичная форма Q имеет матрицу коэффициентов A, а в переменных p_1, p_2 — матрицу коэффициентов $\overline{A}$, причем $\mathbf{q}=B\mathbf{p}$, то $\overline{A}=B^TAB$. ■

1.2.3. Классификация уравнений, линейных относительно старших производных, с *n* независимыми переменными

Классификация уравнений вида (1.29) с произвольным числом n независимых переменных проводится аналогично случаю двух переменных. Зафиксируем точку $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ и поставим в соответствие уравнению (1.29) квадратичную форму

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(x_1,\ldots,x_n\right)q_iq_j \qquad (1.31)$$

от независимых переменных $q_1, \ldots, q_n$. Симметричную матрицу **A** коэффициентов квадратичной формы приведем невырожденным линейным преобразованием к диагональному виду. Согласно закону инерции число положительных и число отрицательных членов в каноническом виде квадратичной формы Q не зависят от способа приведения. Это и позволяет провести классификацию уравнений (1.29). Если все коэффициенты квадратичной формы Q в ее каноническом виде отличны от нуля и одного знака, то уравнение (1.29) называется *эллиптическим в точке* $(x_1, \ldots, x_n)$. Если один из этих коэффициентов отрицателен, а все остальные положительны (или наоборот), то уравнение (1.29) называется *гиперболическим в точке* $(x_1, \ldots, x_n)$. В случае, когда l $(1 < l < n-1)$ коэффициентов положительны, а $n - l$ отрицательны, уравнение (1.29) называется *ультрагиперболическим в точке* $(x_1, \ldots, x_n)$. Если же хотя бы один из этих коэффициентов (но не все) равен нулю, то уравнение (1.29) называется *параболическим в точке* $(x_1, \ldots, x_n)$. Когда в разных частях области изменения независимых переменных уравнение (1.29) принадлежит к различным типам, говорят, что оно является *уравнением смешанного типа.*

1.2.4. Классификация уравнений общего вида на фиксированном решении

Отметим, что в предположении непрерывности всех производных $\dfrac{\partial \Phi}{\partial u_{x_i x_j}}$ можно провести классификацию уравнений общего вида (1.28). Для этого надо фиксировать некоторое решение $u^*(x_1, \ldots, x_n)$ этого уравнения и привести к каноническому виду квадратичную форму (1.31) с коэффициентами $a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) = \left.\dfrac{\partial \Phi}{\partial u_{x_i x_j}}\right|_{u=u^*(x_1,\ldots,x_n)}$. Тогда уравнение (1.28) назовем эллиптическим, гиперболическим и так далее в точке $(x_1, \ldots, x_n)$ *для выбранного решения* u^*.

Пример 1.12. Независимые переменные x_1 и x_2 обозначим через x и y соответственно. Нелинейное уравнение

$$\Phi\left(x, y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}\right) = u_{xx} + u_{xy}u_{yy} + u_{yy}^2 - 4u_{yy} = 0$$

имеет частные решения $u^*(x, y) = 2y^2$, $u^{**}(x, y) = 5xy$, $u^{***}(x, y) = x$ (проверьте!). Перепишем это уравнение в виде $u_{xx} + \frac{1}{2}u_{xy}u_{yy} + \frac{1}{2}u_{yx}u_{yy} + u_{yy}^2 - 4u_{yy} = 0$ и найдем $a_{11} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_{xx}} = 1$, $a_{12} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_{xy}} = \frac{1}{2}u_{yy}$, $a_{21} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_{yx}} = a_{12}$, $a_{22} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_{yy}} = u_{xy} + 2u_{yy} - 4$.

1. Фиксируем решение u^*. На этом решении $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 2$, $a_{22} = 4$, поэтому квадратичная форма (1.31) имеет вид $Q = q_1^2 + 4q_1q_2 + 4q_2^2$. Матрица коэффициентов этой квадратичной формы имеет собственные значения $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 5$ (проверьте!). Поэтому можно выбрать независимые переменные p_1, p_2, в которых $Q = \alpha_1 p_1^2 + \alpha_2 p_2^2 = 5p_2^2$ (можно выбрать другие новые независимые переменные, если для приведения Q к каноническому виду заметить, что $Q = (q_1 + 2q_2)^2$). Следовательно, на решении u^* уравнение имеет параболический тип.

2. Фиксируем решение u^{**}. На этом решении $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{22} = 1$, поэтому квадратичная форма (1.31) уже приведена к каноническому виду $Q = q_1^2 + q_2^2$. Следовательно, на решении u^{**} уравнение имеет эллиптический тип.

3. На решении u^{***} получаем $a_{11} = 1$, $a_{12} = a_{21} = 0$, $a_{22} = -4$. $Q = q_1^2 - 4q_2^2$, поэтому на u^{***} уравнение имеет гиперболический тип.

В трех рассмотренных случаях коэффициенты a_{ij} не зависели от x и y. Поэтому в каждом из этих случаев уравнение имело один и тот же тип во всех точках (x, y). ■

1.2.5. Характеристики. Классификация уравнений с двумя независимыми переменными с помощью уравнения характеристик

Приведение к каноническому виду квадратичной формы Q, отвечающей уравнению (1.29), позволяет записать уравнение в наиболее простой — канонической — форме в каждой *фиксированной точке* $(x_1, \ldots, x_n)$. Но оно не дает способа нахождения замены независимых переменных сразу в некоторой области их изменения. Для уравнений с двумя независимыми переменными (и только для них) такой способ существует. В его основе лежит понятие характеристик уравнения (1.30).

Определение 1.1. Пусть кривая γ на плоскости x, y задана уравнением $\omega(x, y) = 0$, где ω — непрерывно дифференцируемая функция, причем во всех точках этой кривой $\omega_x^2 + \omega_y^2 \neq 0$. Кривая γ называется ***характеристикой*** уравнения (1.30), если функция $\omega(x, y)$ удовлетворяет характеристическому уравнению

$$a_{11}(x,y)\omega_x^2 + 2a_{12}(x,y)\omega_x\omega_y + a_{22}(x,y)\omega_y^2 = 0. \qquad (1.32)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2. Функция $\omega(x, y)$ является частным решением уравнения (1.32) тогда и только тогда, когда равенство $\omega(x, y) = \mathrm{const}$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0. \qquad (1.33)$$

Уравнение (1.33) называется ***дифференциальным уравнением характеристик.*** Знание характеристик уравнения (1.30) позволяет привести его к канонической форме сразу для всех точек x, y в области, в которой (1.30) имеет один и тот же тип. При этом единая для указанной области замена переменных $\begin{cases}\xi = \varphi(x,y)\\ \eta = \psi(x,y)\end{cases}$ может быть построена в явном виде для уравнений каждого из трех типов. Предполагая, что $a_{11}(x, y) \neq 0$, из (1.33) найдем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \qquad (1.34)$$

Гиперболический тип. $D(x,y) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$. Тогда правые части обоих уравнений (1.34) действительны и различны. Поэтому имеем два независимых интеграла уравнения (1.33): $\varphi(x, y) = \mathrm{const}$, $\psi(x, y) = \mathrm{const}$.

Полагая $\begin{cases}\xi = \varphi(x,y)\\ \eta = \psi(x,y)\end{cases}$, получим $\overline{a}_{11} = 0$, $\overline{a}_{22} = 0$, $\overline{a}_{12} \neq 0$ (см. выражения $\overline{a}_{ij}$ в переменных ξ, η).

Разделив уравнение в переменных ξ и η на $\overline{a}_{12}$, получим каноническую форму уравнения гиперболического типа (первую каноническую форму): $u_{\xi\eta} = G_1(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)$.

Если выполнить замену переменных $\begin{cases}\tilde{\xi} = \dfrac{1}{2}(\xi + \eta),\\ \tilde{\eta} = \dfrac{1}{2}(\xi - \eta),\end{cases}$ то получим вторую каноническую форму: $u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} - u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} = G_2\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, u, u_{\tilde{\xi}}, u_{\tilde{\eta}}\right)$.

Эллиптический тип. $D(x,\, y) < 0$. Имеем комплексный интеграл $\varphi(x,\, y) = \text{const}$ уравнения (1.34) (φ — комплекснозначная функция) и комплексно сопряженный с ним. Выберем действительные независимые переменные $\begin{cases}\tilde{\xi} = \operatorname{Re}\varphi(x,y),\\ \tilde{\eta} = \operatorname{Im}\varphi(x,y),\end{cases}$ $\begin{cases}\tilde{\xi} = \dfrac{1}{2}(\xi + \eta),\\ \tilde{\eta} = \dfrac{1}{2i}(\xi - \eta).\end{cases}$

Тогда получим каноническую форму уравнения эллиптического типа: $u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} + u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} = E\left(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, u, u_{\tilde{\xi}}, u_{\tilde{\eta}}\right)$.

Параболический тип. $D(x,\, y) = 0$. Это значит, что $0 \le a_{12}^2 = a_{11}a_{22} = |a_{11}||a_{22}|$, поэтому $\operatorname{sign} a_{11} = \operatorname{sign} a_{22}$.

Тогда $\overline{a}_{11} = \left(\sqrt{|a_{11}|}\xi_x + \sqrt{|a_{22}|}\xi_y\right)^2 \operatorname{sign} a_{11}$. Выбирая $\xi = \varphi(x,\, y)$, где $\varphi(x,\, y) = \text{const}$ — единственный интеграл уравнения (1.34), получим $\overline{a}_{11} = 0$. Но тогда автоматически $\overline{a}_{12} = 0$, поскольку $\overline{a}_{12} = \left(\sqrt{|a_{11}|}\xi_x + \sqrt{|a_{22}|}\xi_y\right)\left(\sqrt{|a_{11}|}\eta_x + \sqrt{|a_{22}|}\eta_y\right)\operatorname{sign} a_{11}$. Поэтому в качестве $\eta(x,\, y)$ можно выбрать любую функцию, независимую с $\varphi(x,\, y)$. В переменных ξ, η получим каноническую форму уравнения параболического типа: $u_{\eta\eta} = P(\xi,\, \eta,\, u,\, u_\xi,\, u_\eta)$.

Замечание 1.11. Геометрический смысл дифференциального уравнения (1.33) состоит в том, что для dx, dy, удовлетворяющих ему в точке $(x,\, y)$, вектор $\mathbf{q} = (dy, -dx)$ задает *характеристическое направление*, перпендикулярное к кривой γ в точке $(x,\, y)$. В точках области эллиптичности уравнение (1.30) не имеет действительных характеристических направлений. В каждой точке области гиперболичности имеется два разных действительных характеристических направления; в точке области параболичности — одно действительное характеристическое направление. Если коэффициенты a_{ij} уравнения (1.30) — достаточно

гладкие функции, то область гиперболичности покрыта сетью двух семейств характеристик, а область параболичности — одним семейством. ■

1.2.6. Типы основных уравнений

Из уравнения (1.33) видно, что уравнение теплопроводности $u_t(x, y) = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t)$ с одной пространственной переменной x является уравнением параболического типа и имеет характеристики $t = \text{const}$. Уравнение $u_t(M, t) = a^2 \Delta_M u(M, t) + f(M, t)$ с двумя или тремя пространственными переменными ($M = M(x, y)$ или $M = M(x, y, z)$) — также параболического типа (выясните, какую замену независимых переменных надо сделать, чтобы записать эти уравнения в канонической форме!).

Уравнения Лапласа, Пуассона и Гельмгольца — уравнения эллиптического типа (проверьте в случае двух независимых переменных, что у них нет действительных характеристик!).

Для волнового уравнения $u_{tt}(x, y) = a^2 u_{xx}(x, t) + f(x, t)$ дифференциальное уравнение характеристик (1.33) имеет вид $(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$. Получаем два семейства характеристик: $x - at = \text{const}$ и $x + at = \text{const}$. Волновое уравнение с одной или несколькими пространственными переменными — уравнение гиперболического типа (выясните, какую замену независимых переменных надо сделать, чтобы записать его в канонической форме!).

Задача 1.1. Приведите к канонической форме уравнение $u_{xx} + xu_{yy} = 0$ в каждой области плоскости x, y, в которой оно сохраняет тип.

Решение. Запишем дифференциальное уравнение характеристик: $(dy)^2 + x(dx)^2 = 0$. Если $x < 0$, то исходное уравнение гиперболического типа. В этом случае $dy = \pm\sqrt{-x}dx$, и мы имеем два независимых действительных интеграла уравнения характеристик: $y + \frac{2}{3}(-x)^{3/2} = \text{const}$ и $y - \frac{2}{3}(-x)^{3/2} = \text{const}$. Выполним замену переменных $\begin{cases} \xi = y + \frac{2}{3}(-x)^{3/2}, \\ \eta = y - \frac{2}{3}(-x)^{3/2}. \end{cases}$ Для этого выразим u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy} в переменных ξ, η и подставим u_{xx}, u_{yy} в исходное уравнение.

В итоге получим $u_{\xi\eta} = \dfrac{u_\xi - u_\eta}{8(-x)^{3/2}}$. В силу выполняемой замены переменных $(-x)^{3/2} = \dfrac{3}{4}(\xi - \eta)$. Окончательно: $u_{\xi\eta} = \dfrac{u_\xi - u_\eta}{6(\xi - \eta)}$ — первая каноническая форма уравнения в области $\xi > \eta$.

Можно вместо ξ, η ввести другие переменные: $\begin{cases} \tilde{\xi} = y, \\ \tilde{\eta} = \dfrac{2}{3}(-x)^{3/2}. \end{cases}$

Снова выразим u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy} в переменных $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ и из исходного уравнения получим $u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} - u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} = \dfrac{u_{\tilde{\eta}}}{3\tilde{\eta}}$ — его вторую каноническую форму. Зная, что $\begin{cases} \tilde{\xi} = \dfrac{1}{2}(\xi + \eta), \\ \tilde{\eta} = \dfrac{1}{2}(\xi - \eta), \end{cases}$ проверьте полученные ответы, переходя от первой канонической формы ко второй, и наоборот.

Если $x > 0$, то исходное уравнение эллиптического типа. В этом случае получаем два комплексно-сопряженных интеграла уравнения характеристик: $y + \dfrac{2}{3}ix^{3/2} = \text{const}, y - \dfrac{2}{3}ix^{3/2} = \text{const}$.

Выберем новые действительные независимые переменные: $\begin{cases} \tilde{\xi} = y, \\ \tilde{\eta} = \dfrac{2}{3}x^{3/2}. \end{cases}$ Выразим u_x, u_{xx}, u_y, u_{yy} в новых переменных и получим каноническую форму исходного уравнения $u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} + u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} + \dfrac{u_{\tilde{\eta}}}{3\tilde{\eta}} = 0$ в области $\tilde{\eta} > 0$.

Если $x = 0$, то формально исходное уравнение параболического типа. Но имеет ли смысл при $x = 0$ указывать его тип как тип уравнения в частных производных?

Рассмотренное уравнение называется ***уравнением Трикоми***. В газовой динамике оно описывает дозвуковое движение в области гиперболичности и сверхзвуковое движение в области эллиптичности. Уравнение Трикоми — уравнение смешанного типа. ■

1.3. Задача Коши. Роль характеристик в постановке задачи. Теорема Ковалевской

Дифференциальное уравнение, описывающее некоторый физический процесс или явление, выражает определенный физический закон. Оно имеет бесконечно много решений и само по себе не выделяет однозначно конкретный процесс. Чтобы полностью охарактеризовать физическую задачу, надо добавить некоторые дополнительные условия, содержащие информацию об этом конкретном процессе. Такая информация должна иметь физическую интерпретацию и гарантировать осмысленность постановки математической задачи.

1.3.1. Задача Коши

Рассмотрим дополнительные условия одного специального, но весьма общего вида для уравнения

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x_1,\ldots,x_n\right)u_{x_ix_j} + F\left(x_1,\ldots,x_n,u,u_{x_1},\ldots,u_{x_n}\right)=0 \quad (1.35)$$

(все коэффициенты a_{ij} и функция F здесь непрерывны, и всюду $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\left(x_1,\ldots,x_n\right)\neq 0$, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$). Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, \ldots, x_n$ $(n > 1)$ фиксирована некоторая гладкая двусторонняя *гиперповерхность* γ без самопересечений, а в каждой ее точке — направление $\zeta(x_1, \ldots, x_n)$, *не касательное* к γ; $|\zeta| = 1$. На гиперповерхности γ зададим дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\Psi_0(x_1, \ldots, x_n)$ и непрерывно дифференцируемую функцию $\Psi_1(x_1, \ldots, x_n)$. ***Задача Коши***: в односторонней или в двусторонней окрестности гиперповерхности γ найти решение $u(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (1.35), удовлетворяющее дополнительным *начальным* условиям

$$u\big|_\gamma = \Psi_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right|_\gamma = \Psi_1. \quad (1.36)$$

Пример 1.13. Для уравнения поперечных колебаний струны относительно функции $u(x,t)$ роль γ может играть, например, отрезок $0 \le x \le l$ оси Ox или вся ось Ox в фиксированный момент времени t_0. Условие $u(x,t)\big|_{(x,t)\in\gamma} = \Psi_0$ означает, что в момент вре-

мени t_0 известно поперечное смещение струны: $u(x,\, t_0) = \Psi_0(x)$ на указанной части оси Ox. Если в пространстве $\mathbb{R}^2$ переменных x, t всюду на выбранной γ задать направление ζ вдоль оси Ot в сторону роста t, то условие $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \zeta}\right|_{(x,t)\in\gamma} = \Psi_1$ означает, что на указанной части оси Ox известна скорость поперечного движения струны: $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=t_0} = \Psi_1(x)$. Следует рассмотреть вопрос о возможности нахождения колебаний струны, например, при $t \geq t_0$ — в односторонней окрестности γ в пространстве $\mathbb{R}^2$ переменных x, t. ■

Пример 1.14. Для уравнения Лапласа, описывающего потенциал $u(x,\, y,\, z)$ скорости течения несжимаемой жидкости, в качестве γ можно выбрать, например, координатную плоскость Oxy в прямоугольной системе $Oxyz$. Условие $u(x,y,z)\big|_{(x,y,z)\in\gamma} = \Psi_0$ означает, что при $z = 0$ известны значения потенциала: $u(x,\, y,\, 0) = \Psi_0(x,\, y)$. Если в пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных x, y, z всюду на γ задать направление ζ, совпадающее с направлением оси Oz, то условие $\left.\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial \zeta}\right|_{(x,y,z)\in\gamma} = \Psi_1$ означает, что на Oxy известна нормальная к этой поверхности составляющая скорости течения: $\left.\dfrac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\right|_{z=0} = \Psi_1(x,y)$. Можно рассмотреть вопрос об осмысленности задачи нахождения $u(x,\, y,\, z)$, например, при $z \geq 0$ или во всем пространстве $Oxyz$. ■

Замечание 1.12. В задаче Коши (1.35), (1.36) не будем заранее указывать область переменных $x_1, \ldots, x_n$, в которой должно быть определено ее решение. ■

Замечание 1.13. Из одних лишь условий (1.36) можно найти значения всех первых производных искомой функции $u(x_1, \ldots, x_n)$ на гиперповерхности γ. Это следует из того, что выбранное направление ζ является *некасательным* к γ, и из того, что γ является *гладкой гиперповерхностью*, т. е. через любую ее внутреннюю точку можно провести в $\mathbb{R}^n$ касательную плоскость размерности $n - 1$. ■

Между задачей Коши (1.35), (1.36) и задачей Коши для обыкновенного дифференциального уравнения существует принципи-

альное различие, связанное с приведением уравнения (1.35) к *нормальной форме*, т. е. к уравнению, разрешенному относительно старшей производной по некоторой независимой переменной. Пусть точка $\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ принадлежит гиперповерхности γ, и в некоторой окрестности этой точки γ задается уравнением $\omega(x_1, \ldots, x_n) = 0$, причем ω — непрерывно дифференцируемая функция и $\omega_{x_1}^2 + \ldots + \omega_{x_n}^2 \neq 0$, т. е. у гиперповерхности γ нет особых точек. Для определенности будем считать, что в рассматриваемой окрестности $\omega_{x_n} \neq 0$. От переменных $x_1, \ldots, x_n$ перейдем к новым независимым переменным в выделенной окрестности:

$$\xi_1 = x_1, \ldots, \xi_{n-1} = x_{n-1}, \xi_n = \omega(x_1, \ldots, x_n). \qquad (1.37)$$

В этой окрестности в переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ условия Коши (1.36) будут поставлены на *гиперплоскости* $\xi_n = 0$. Функция u примет вид $u = u_1(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n)$. Выразим производные $u_{x_ix_j}$ в переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$, дополнительно предполагая, что функция ω дважды непрерывно дифференцируема:

$$u_{x_i} = u_{\xi_i} + u_{\xi_n}\omega_{x_i}, \ i = 1, \ldots, n-1; \ u_{x_n} = u_{\xi_n}\omega_{x_n};$$

$$u_{x_ix_j} = u_{\xi_i\xi_j} + u_{\xi_i\xi_n}\omega_{x_j} + u_{\xi_j\xi_n}\omega_{x_i} + u_{\xi_n\xi_n}\omega_{x_i}\omega_{x_j} + u_{\xi_n}\omega_{x_ix_j}$$

— при $i = 1, \ldots, n-1, j = 1, \ldots, n-1$;

$$u_{x_ix_n} = u_{\xi_i\xi_n}\omega_{x_n} + u_{\xi_n\xi_n}\omega_{x_i}\omega_{x_n} + u_{\xi_n}\omega_{x_ix_n}$$

— при $i = 1, \ldots, n-1$, и аналогично для $u_{x_jx_n}$ при $j = 1, \ldots, n-1$;

$$u_{x_nx_n} = u_{\xi_n\xi_n}\omega_{x_n}^2 + u_{\xi_n}\omega_{x_nx_n}.$$

Тогда уравнение (1.35) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x_1,\ldots,x_n\right)u_{x_ix_j} + F =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x_1,\ldots,x_n\right)\omega_{x_i}\omega_{x_j}\right)u_{\xi_n\xi_n} + H\left(\ldots\right) = 0, \qquad (1.38)$$

где H содержит частные производные функции u, имеющие по переменной ξ_n лишь первый порядок.

Квадратичная форма $Q = Q\left(q_1,\ldots,q_n\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x_1,\ldots,x_n\right)q_iq_j$

от независимых действительных переменных $q_1, \ldots, q_n$ с зависящими от точки $(x_1, \ldots, x_n)$ коэффициентами a_{ij} называется *сим-*

волом дифференциального выражения $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x_1,\ldots,x_n\right)u_{x_ix_j}$,

которое содержит все члены со старшими производными в (1.35). Подчеркнем, что $Q = Q(x_1, \ldots, x_n; q_1,\ldots, q_n)$. В уравнении (1.38) коэффициент при $u_{\xi_n\xi_n}$ равен $Q\left(x_1,\ldots,x_n;\omega_{x_1},\ldots,\omega_{x_n}\right)$. Если в окрестности точки $\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ этот коэффициент не обращается в нуль, то, разделив на него уравнение (1.38), получим разрешенное относительно $u_{\xi_n\xi_n}$ уравнение, называемое *уравнением в нормальной форме*. Если $Q\left(x_1^0,\ldots,x_n^0;\omega_{x_1},\ldots,\omega_{x_n}\right)=0$, то в точке $\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ уравнение (1.38) не содержит $u_{\xi_n\xi_n}$, т. е. по переменной ξ_n оно является в этой точке уравнением лишь первого порядка, а не второго. Оказывается, что в последнем случае данные Коши в точке $\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ нельзя задать произвольно: уравнение (1.38) уже устанавливает требования к значениям $\Psi_0\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ и $\Psi_1\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$.

В случае $Q\left(x_1^0,\ldots,x_n^0;\omega_{x_1},\ldots,\omega_{x_n}\right)=0$ точка $\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ называется *характеристической точкой* гиперповерхности γ, в противном случае — *нехарактеристической*; гиперповерхность γ, все точки которой характеристические, называется *характеристикой* уравнения (1.35).

Определение 1.2. ***Характеристикой уравнения*** (1.35) называется гладкая гиперповерхность γ, заданная уравнением $\omega(x_1, \ldots, x_n) = 0$ и условием $\omega_{x_1}^2 + \ldots + \omega_{x_n}^2 \neq 0$, все точки которой удовлетворяют *характеристическому уравнению* $Q\left(x_1,\ldots,x_n;\omega_{x_1},\ldots,\omega_{x_n}\right)=0$.

Если $n = 2$, то характеристику называют характеристической кривой, если $n = 3$, — характеристической поверхностью. Говорят, что вектор $\mathbf{q}=\left(q_1,\ldots,q_n\right)\neq\mathbf{0}$ задает *характеристическое направление* для уравнения (1.35) в точке $(x_1, \ldots, x_n)$ на его характеристике γ, если $Q(x_1, \ldots, x_n; q_1, \ldots, q_n) = 0$. Гладкая гиперповерхность γ будет характеристикой уравнения (1.35) в том и только в том случае, если все ее нормали задают характеристические направления. Для каждой точки $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ множество всех векторов $\mathbf{q}$, удовлетворяющих условию $Q(x_1, \ldots, x_n; q_1, \ldots, q_n) = 0$, образует конус с вершиной в начале координат; он называется *характеристическим конусом* для уравнения (1.35) в этой точке. Через точку $(x_1, \ldots, x_n)$ может проходить более одной

характеристики уравнения (1.35). Каждый вектор $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$, принадлежащий характеристическому конусу для данной точки $(x_1, \ldots, x_n)$, является вектором нормали в этой точке к некоторой характеристике, проходящей через эту точку.

Пример 1.15. Уравнение Пуассона $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -f(x, y, z)$ не имеет действительных характеристик, как и любое уравнение эллиптического типа: для него знакоопределенная квадратичная форма $Q(q_1, q_2, q_3) = 0$ только при $q_1 = q_2 = q_3 = 0$. Характеристическое уравнение $\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = 0$ противоречит определению характеристик и не задает никакой поверхности в $Oxyz$. ■

Пример 1.16. Для волнового уравнения $u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = f(x, y, z, t)$ характеристическим является уравнение $\omega_t^2 - a^2\left(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2\right) = 0$. Для любой фиксированной точки (x_0, y_0, z_0, t_0) поверхность

$$\omega(x, y, z, t) \equiv a^2 (t - t_0)^2 - \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2\right) = 0 \quad (1.39)$$

есть характеристика γ волнового уравнения (проверьте!); это конус в пространстве переменных x, y, z, t с вершиной (x_0, y_0, z_0, t_0). Любая касательная к γ гиперплоскость в $\mathbb{R}^4$ тоже является характеристикой. Уравнение характеристического конуса: $q_4^2 - a^2\left(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2\right) = 0$.

В случае одной пространственной переменной уравнение (1.39) имеет вид $a^2(t - t_0)^2 = (x - x_0)^2$ и определяет две характеристические прямые, проходящие через точку (x_0, t_0): $x - at = x_0 - at_0$, $x + at = x_0 + at_0$. Уравнению характеристического конуса удовлетворяют векторы нормалей к этим прямым: $\mathbf{q} = (1, -a)$, $\mathbf{q} = (1, a)$. ■

Свойства задачи Коши (1.35), (1.36) существенно различаются в зависимости от того, где поставлены условия (1.36): на характеристике или нет. Пусть γ является характеристикой уравнения (1.35). Тогда на γ это уравнение накладывает некоторое условие на Ψ_0 и Ψ_1. Если оно нарушено, то задача (1.35), (1.36) не имеет решений; если же это условие выполнено, то информация в (1.36) может оказаться недостаточной для выделения единственного решения уравнения (1.35).

Пример 1.17. Для уравнения теплопроводности

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{1}{a^2} u_t \quad (1.40)$$

характеристическим является уравнение $\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2 = 0$, означающее, что $\omega = \omega(t)$ — *произвольная функция*. Характеристики определяются из условий $\omega(t) = 0,\ \omega_t^2(t) \neq 0$, которые дают $t = \text{const}$ — гиперплоскости в пространстве переменных $x,\ y,\ z,\ t$. Выберем в (1.36) гиперплоскость γ, имеющую уравнение $t = 0$, и направление ζ, совпадающее с Ot. Тогда условия Коши имеют вид $u(x,\ y,\ z,\ 0) = \Psi_0(x,\ y,\ z)$, $u_t(x,\ y,\ z,\ 0) = \Psi_1(x,\ y,\ z)$. Полагая в уравнении теплопроводности $t = 0$, получаем соотношение, *связывающее* Ψ_0 и Ψ_1: $\Delta_{x,y,z}\Psi_0(x,y,z) = \dfrac{1}{a^2}\Psi_1(x,y,z)$. Поэтому второе из условий (1.36) задавать нет смысла: достаточно только условия $u|_\gamma = \Psi_0$ на характеристике γ.

Отметим, что подстановка функции Ψ_0 в уравнение (1.40) на γ требует наличия у Ψ_0 непрерывных вторых производных. Это требование существенно сужает класс функций u, которые разумно считать решениями задачи. Поэтому можно отказаться от выполнимости уравнения (1.40) при $t = 0$ и от чрезмерной гладкости Ψ_0. Если речь идет о задаче Коши при $t \geq 0$, то можно потребовать, чтобы уравнение (1.40) выполнялось лишь при $t > 0$, но решение задачи было бы *непрерывным* при $t \geq 0$, тогда функцию Ψ_0 достаточно считать лишь непрерывной. ■

Пример 1.18. Уравнение

$$u_{xy} = 0 \tag{1.41}$$

является уравнением гиперболического типа в первой канонической форме. Прямая $x = 0$ на плоскости Oxy — его характеристика γ. Пусть ζ совпадает с Ox, и условия Коши (1.36) имеют вид $u(0,\ y) = \Psi_0(y)$, $u_x(0,\ y) = \Psi_1(y)$. Предполагаем, что уравнение (1.41) выполнено всюду, включая γ, а решение задачи — дважды непрерывно дифференцируемая функция.

Если функция $\Psi_1(y)$ не равна тождественно константе, то задача Коши для уравнения (1.41) не имеет решений: второе условие противоречит уравнению на γ.

Если $\Psi_1(y) \equiv c = \text{const}$, то решение задачи Коши неединственно: для любой достаточно гладкой функции $g(x)$, удовлетворяющей условиям $g(0) = 0$, $g_x(0) = 0$, функция $u(x,\ y) = cx + g(x) + \Psi_0(y)$ будет решением задачи Коши. (Заметьте, что в отличие от примера 1.17, здесь Ψ_0 и Ψ_1 не оказываются связанными друг с другом каким-либо соотношением.) ■

1.3.2. Случай уравнений первого порядка

Для линейного относительно производных уравнения *первого порядка*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\left(x_1,\ldots,x_n\right)u_{x_i} + F\left(x_1,\ldots,x_n,u\right)=0 \qquad (1.42)$$

(все коэффициенты a_i и функция F здесь непрерывны, и всюду $\sum_{i=1}^{n} a_i^2\left(x_1,\ldots,x_n\right)\neq 0$, $u = u(x_1, \ldots, x_n)$) задача Коши ставится аналогично. Пусть в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ $(n > 1)$ дана гладкая двусторонняя гиперповерхность γ без самопересечений, а на ней — непрерывно дифференцируемая функция $\Psi_0(x_1, \ldots, x_n)$. Задача Коши: найти решение $u(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (1.42), удовлетворяющее *одному* «начальному» условию

$$u\big|_{\gamma} = \Psi_0. \qquad (1.43)$$

Пусть γ задана уравнением $\omega(x_1, \ldots, x_n) = 0$, причем ω — непрерывно дифференцируемая функция и $\omega_{x_1}^2 + \ldots + \omega_{x_n}^2 \neq 0$. Введем символ $L = L\left(q_1,\ldots,q_n\right) = L\left(x_1,\ldots,x_n;q_1,\ldots,q_n\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i\left(x_1,\ldots,x_n\right)q_i$ дифференциального выражения

$\sum_{i=1}^{n} a_i\left(x_1,\ldots,x_n\right)u_{x_i}$; L является *линейной формой* от независимых действительных переменных $q_1, \ldots, q_n$ с зависящими от точки $(x_1, \ldots, x_n)$ коэффициентами a_i. *Характеристическое уравнение*

$$L\left(x_1,\ldots,x_n;\omega_{x_1},\ldots,\omega_{x_n}\right)\equiv\sum_{i=1}^{n} a_i\left(x_1,\ldots,x_n\right)\omega_{x_i}=0 \qquad (1.44)$$

совпадает с однородным уравнением (1.42) ($F \equiv 0$). Точка $\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ гиперповерхности γ называется характеристической, если $L\left(x_1^0,\ldots,x_n^0;\omega_{x_1},\ldots,\omega_{x_n}\right)=0$, и нехарактеристической в противном случае.

Задача 1.2. Выполните замену независимых переменных (1.37) в уравнении (1.42). В каком случае (1.42) можно в окрестности точки $\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)\in\gamma$ привести к нормальной форме относительно переменной ξ_n? ■

Определение 1.3. ***Характеристикой уравнения*** (1.42) называется гладкая гиперповерхность γ без особых точек, которая удовлетворяет характеристическому уравнению (1.44). Говорят, что вектор $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n) \neq \mathbf{0}$ задает характеристическое направление для уравнения (1.42) в точке $(x_1, \ldots, x_n)$ на его характеристике γ, если $L(x_1, \ldots, x_n; q_1, \ldots, q_n) = 0$.

Решения уравнения (1.44) можно описать средствами *обыкновенных* дифференциальных уравнений, если дополнительно предположить, что все функции a_i непрерывно дифференцируемы. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3. Функция $\omega(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет уравнению (1.44) тогда и только тогда, когда равенство $\omega(x_1, \ldots, x_n) = \text{const}$ является первым интегралом системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \ldots, x_n)} \tag{1.45}$$

относительно $x_1, \ldots, x_n$.

Систему в симметричной форме (1.45) можно записать и в виде автономной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots \\ \dot{x}_n = a_n(x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{1.46}$$

где $\dot{x}_i = \dfrac{dx_i(\tau)}{d\tau}$, τ — независимая переменная.

Если все функции a_i непрерывно дифференцируемы и $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0$, то для системы (1.46) справедлива теорема о существовании и единственности ее решения, проходящего при $\tau = 0$ через заданную точку $\left(x_i(0) = x_i^0, i = 1, \ldots, n\right)$. В этом случае через любую точку $\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ характеристики γ уравнения (1.42) проходит единственная интегральная кривая системы (1.46), касательный вектор (вектор скорости) которой в этой точке равен $\dot{\mathbf{x}} = \left(a_1\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right), \ldots, a_n\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)\right)^T$ (T означает транспонирование). Уравнение (1.44) свидетельствует о том, что этот вектор будет касательным и к гиперповерхности γ, т. е. интегральная кривая касается характеристики уравнения (1.42). Если же через

точку $\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ гиперповерхности γ, заданной уравнением $\omega(x_1, \ldots, x_n) = 0$, интегральная кривая системы (1.46) проходит некасательно к γ, то эта точка нехарактеристическая для уравнения (1.42): в ней не выполнено (1.44). Такая γ не является характеристикой (1.42). Если интегральная кривая системы (1.46) проходит через точку характеристической гиперповерхности γ, то эта интегральная кривая целиком лежит на γ; характеристика γ «соткана» из непересекающихся интегральных кривых системы (1.46), причем вдоль каждой такой интегральной кривой $\omega(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Система (1.45) (или (1.46)) имеет $n-1$ независимых первых интегралов: $\omega^{(l)}(x_1, \ldots, x_n) = \text{const}$, $l = 1, \ldots, n-1$, определяющих $n-1$ семейств характеристик уравнения (1.42). Общее решение *однородного* уравнения (1.42) ($F \equiv 0$):

$$u(x_1, \ldots, x_n) = U(\omega^{(1)}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \omega^{(n-1)}(x_1, \ldots, x_n)),$$

где U — *произвольная* непрерывно дифференцируемая функция $n-1$ переменных.

Пример 1.19. Для уравнения $u_t - au_x = 0$, $u = u(x, t)$, $a = \text{const} > 0$, система (1.45) имеет вид $\dfrac{dx}{-a} = \dfrac{dt}{1}$. Получаем одно семейство характеристик $x + at = \text{const}$. Через каждую точку (x_0, t_0) проходит единственная характеристическая прямая: $x + at = x_0 + at_0$. Вектор $\mathbf{q} = (1, a)$ задает характеристическое направление, перпендикулярное каждой такой прямой. Общее решение уравнения: $u(x, t) = U(x + at)$.

Для уравнения $u_t + au_x = 0$, $a = \text{const} > 0$, получаем $\dfrac{dx}{a} = \dfrac{dt}{1}$, $x - at = \text{const}$. Через точку (x_0, t_0) проходит единственная характеристика: $x - at = x_0 - at_0$, а $\mathbf{q} = (1, -a)$ перпендикулярен к ней. Общее решение уравнения: $u(x, t) = U(x - at)$. ■

Свойства задачи Коши (1.42), (1.43) различаются в зависимости от того, поставлено условие (1.43) на характеристике или нет. Случай, когда γ — характеристика, выделенный.

Пример 1.20. Задача Коши $u_t + au_x = 0$, $a \neq 0$, $u\big|_{x=at} = 1$ имеет бесконечно много решений: $u(x, t) = U(x - at)$, где U — любая непрерывно дифференцируемая функция, для которой $U(0) = 1$. Если же поставить другое условие: $u\big|_{x=at} = t$, то получим неразрешимую задачу. ■

Поставим теперь задачу Коши для *системы* k уравнений в частных производных первого порядка с k неизвестными функциями:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1,\ldots,x_n)\mathbf{u}_{x_i} + \mathbf{F}(x_1,\ldots,x_n,\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \qquad (1.47)$$

Здесь x_1, ..., x_n — скалярные действительные независимые переменные; $\mathbf{u}(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^k$ — искомая вектор-функция; коэффициенты A_i суть заданные $k \times k$ — матрицы с непрерывными элементами; $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^k$ — заданная непрерывная вектор-функция.

Требуется найти решение $\mathbf{u}$, удовлетворяющее условию $\mathbf{u}\big|_\gamma = \Psi_0$, где γ — фиксированная гиперповерхность в пространстве переменных x_1, ..., x_n; $\Psi_0(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^k$ — заданная вектор-функция. Относительно γ сохраняем прежние предположения.

Задача 1.3. Выполните замену независимых переменных (1.37) в системе уравнений (1.47). В каком случае (1.47) можно в окрестности точки $(x_1^0,\ldots,x_n^0) \in \gamma$ привести к нормальной форме относительно переменной ξ_n? ■

Введем скалярные независимые действительные переменные

q_1, ..., q_n и символ $L = L(x_1,\ldots,x_n;q_1,\ldots,q_n) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x_1,\ldots,x_n)q_i$

дифференциального выражения в (1.47). Для фиксированной точки (x_1, ..., x_n) *символ* L является линейной формой относительно q_1, ..., q_n, принимающей *матричные* значения: $L \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Гладкая гиперповерхность γ без особых точек, определенная уравнением $\omega(x_1, \ldots, x_n) = 0$ и удовлетворяющая *характеристическому уравнению* $\det\left(L\left(x_1,\ldots,x_n;\omega_{x_1},\ldots\omega_{x_n}\right)\right) = 0$, называется характеристикой системы (1.47). Множество векторов $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)$, удовлетворяющих равенству $\det(L(x_1, \ldots, x_n; q_1, \ldots, q_n)) = 0$, является конусом (поскольку вместе с каждым таким вектором этому равенству удовлетворяет и любой коллинеарный ему вектор). Он называется *характеристическим конусом*, или конусом характеристических нормалей.

Пример 1.21. Распространение плоских звуковых волн в однородной покоящейся среде иногда описывают следующей моделью. Пусть $p_0 = \text{const}$, $\rho_0 = \text{const}$, $v_0 = 0$ — давление, плотность массы и скорость покоящейся среды, $a = \text{const}$ характеризует ее сжимаемость (вязкость и теплопроводность среды не

учитываются). Введем возмущение давления $p(x,\ t)$ и скорость $v(x,\ t)$ возмущенной среды; будем считать возмущения *малыми* и распространяющимися вдоль оси Ox. Такие акустические волны можно описать системой уравнений ($k = n = 2$)

$$\begin{cases} v_t + \dfrac{1}{\rho_0} p_x = 0, & (1.48) \\ p_t + \rho_0 a^2 v_x = 0. & (1.49) \end{cases}$$

Введем вектор-столбец $\mathbf{u} = \big(v(x,t), p(x,t)\big)^T$ и запишем (1.48), (1.49) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{u}_t + \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho_0} \\ \rho_0 a^2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_x = \mathbf{0}. \qquad (1.50)$$

Задача Коши: при $t \geq 0$ найти решение системы (1.48), (1.49), удовлетворяющее начальному условию $v(x,\ 0) = \Psi_{01}(x)$, $p(x,\ 0) = = \Psi_{02}(x)$, $-\infty < x < +\infty$.

Найдем характеристики системы (1.50). Пусть кривая на плоскости Oxt задана условиями $\omega(x,\ t) = 0$, $\omega_x^2 + \omega_t^2 \neq 0$;

$$\det\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \omega_t + \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\rho_0} \\ \rho_0 a^2 & 0 \end{pmatrix} \omega_x\right] = 0 \text{ — характеристическое уравнение.}$$

Оно означает $\det \begin{pmatrix} \omega_t & \dfrac{1}{\rho_0}\omega_x \\ \rho_0 a^2 \omega_x & \omega_t \end{pmatrix} = \omega_t^2 - a^2\omega_x^2 = 0$, т. е. $\omega_t - a\omega_x = 0$ и $\omega_t + a\omega_x = 0$ — уравнения двух семейств характеристик. Как отмечалось, это семейства $x + at = \text{const}$ и $x - at = \text{const}$.

Если (1.48) продифференцировать по x, а (1.49) — по t, то можно исключить из уравнений v_{xt} и получить для $p(x,\ t)$ уравнение малых свободных колебаний $p_{tt} = a^2 p_{xx}$. Характеристики этого уравнения второго порядка совпадают с характеристиками системы (1.48), (1.49). ■

1.3.3. Теорема Ковалевской

Можно ли утверждать, что в случае, когда гиперповерхность γ *не является характеристикой*, решение задачи Коши в окрестности γ существует и единственно? Положительный ответ на этот

вопрос при выполнении дополнительных требований дает теорема Ковалевской. Эта теорема справедлива для *системы в нормальной форме k* дифференциальных уравнений в частных производных любого порядка $m \geq 1$ с k неизвестными функциями (уравнения могут быть нелинейными). Сформулируем ее для одного лишь уравнения (1.38) второго порядка; эта формулировка передаст смысл теоремы.

Напомним, что если точка $\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) \in \gamma$ *нехарактеристическая*, то (1.38) можно разделить на коэффициент при $u_{\xi_n \xi_n}$:

$$u_{\xi_n \xi_n} = N(\ldots) \equiv \frac{H(\ldots)}{Q\left(x_1^0, \ldots, x_n^0; \omega_{x_1}, \ldots, \omega_{x_n}\right)}. \tag{1.51}$$

Уравнение (1.38) мы записали, выполняя невырожденную замену независимых переменных в уравнении (1.35). Не изменится ли от этого свойство точки $\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ быть или не быть характеристической?

Утверждение 1.1. Характеристика γ уравнения (1.35) инвариантна относительно замены независимых переменных.

Это означает следующее: если функция $\omega(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет характеристическому уравнению $Q(x_1, \ldots, x_n; \omega_{x_1}, \ldots, \omega_{x_n}) = 0$, а в новых переменных имеет вид $\omega_1(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, то функция ω_1 удовлетворяет уравнению, характеристическому для уравнения (1.35), записанного в переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Если $\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ была нехарактеристической точкой, то при замене переменных это ее свойство не изменилось. Исходное уравнение (1.35) приводится в окрестности этой точки к виду (1.51), где N не содержит производных по ξ_n порядка выше первого:

$$N = N\left(\xi_1, \ldots, \xi_n, u, \ldots, \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi_n^\alpha} \frac{\partial^\beta u}{\partial \xi_i^\beta}, \ldots\right),\ \alpha + \beta \leq 2,\ \alpha \leq 1,\ i = 1, \ldots,$$

$n - 1$, (1.51) — уравнение в нормальной форме.

Примеры 1.22. Волновое уравнение, уравнение Пуассона и уравнение теплопроводности можно записать в нормальной форме относительно каждой переменной x, y, z в пространстве $Oxyz$. Волновое уравнение обычно записывают в нормальной форме относительно t. ■

Будем считать, что задача Коши изначально поставлена в переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ для уравнения в нормальной форме (1.51) (ω, Ψ_0, Ψ_1 сразу заданы в этих переменных). Основное (и ограни-

чительное!) предположение теоремы Ковалевской — аналитичность функций ω, Ψ_0, Ψ_1, N и *решения* u по всем их аргументам. Функция $w(s_1, \ldots, s_p)$ называется аналитической в точке $\left(s_1^0, \ldots, s_p^0\right)$, если в некоторой окрестности этой точки она представляется в виде равномерно сходящегося степенного ряда: $w\left(s_1, \ldots, s_p\right) =$

$$= \sum_{i_1 + \ldots + i_p \geq 0} c_{i_1 \ldots i_p} \left(s_1 - s_1^0\right)^{i_1} \ldots \left(s_p - s_p^0\right)^{i_p}.$$

Теорема 1.4 (теорема Ковалевской). Если в некоторой окрестности нехарактеристической точки гиперповерхности γ функции ω, Ψ_0, Ψ_1, N аналитичны по всем своим аргументам, то найдется окрестность этой точки, в которой существует аналитическое решение задачи Коши (1.51), (1.36), единственное в классе аналитических функций u. ■

Задача 1.4. Сформулируйте теорему Ковалевской для приведенного к нормальной форме уравнения (1.42); для приведенной к нормальной форме системы (1.47). ■

Замечание 1.14. Теорема Ковалевской устанавливает существование и единственность решения задачи (1.51), (1.36) «*в малом*»: лишь в некоторой достаточно малой окрестности нехарактеристической гиперповерхности γ. Обычно же нас интересует вопрос о существовании и единственности решения в наперед заданной области — «*в целом*». ■

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть c — произвольная постоянная, а функция $U(x, t)$ удовлетворяет уравнению $u_t = u_{xx}$. Проверьте, являются ли следующие сложные функции $U_i(x, t)$ также его решениями:

$U_1(x, t) = U(x - c, t)$, $U_2(x, t) = U(x, t - c)$, $U_3(x, t) = U(cx, c^2 t)$,

$U_4(x, t) = \exp\{-cx + c^2 t\} U(x - 2ct, t)$,

$U_5(x, t) = (1 + 4ct)^{-1/2} \exp\{-cx^2/(1 + 4ct)\} U(x/(1 + 4ct), t/(1 + 4ct))$.

Покажите, что функция $U(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left\{-x^2/(4t)\right\}$ является решением указанного уравнения $(t > 0)$.

Решите аналогичную задачу для уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$, $a^2 \neq 1$.

2. Найдите общий вид решения уравнения $u_t = u_{xx}$, которое зависит только от $x - ct$ ($c = \text{const}$): $U(x, t) = V(x - ct)$ (найдите функцию одной переменной V).

3. Выполнив замену независимых переменных в выражении для оператора Лапласа в декартовой системе координат Oxy на плоскости, получите его выражение в полярной системе координат.

4. Выполнив замену независимых переменных в выражении для оператора Лапласа в декартовой системе координат $Oxyz$ в пространстве, получите его выражение в сферической системе координат.

5. Однородный стержень ($D = \{0 < x < l\}$, $c = \text{const}$, $\rho = \text{const}$, $k = \text{const}$) имеет стационарную температуру $u(x,t) = \dfrac{W}{k}\left(\dfrac{x^2}{l} - x\right)$, $W = \text{const} > 0$, $[W] = \dfrac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{см}^2}$. Во все моменты времени через оба конца стержня снаружи «нагнетается» теплота внутрь стержня с постоянной плотностью теплового потока W. Боковая поверхность стержня теплоизолирована. Найдите распределение поглотителей теплоты в стержне.

6. Стационарная температура $u(r,\varphi,t) = \dfrac{u_0}{3} r^2 \sin\varphi$ ($u_0 = \text{const}$) однородной плоской круглой пластины ($D = \{0 \le r < r_0,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$, r, φ — полярные координаты) получена заданием на ее границе во все моменты времени температуры $u(r_0,\varphi,t) = \dfrac{u_0}{3} r_0^2 \sin\varphi$ и действием источников (или поглотителей) теплоты в пластине. Найдите их распределение по пластине.

7. Пусть функция f одной независимой переменной дважды непрерывно дифференцируема. Проверьте, что функции $U_1(x, t) = f(x - at)$ и $U_2(x, t) = f(x + at)$ удовлетворяют волновому уравнению $u_{tt}(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t)$ (U_1 и U_2 — плоские волны, бегущие вдоль оси Ox в пространстве $Oxyz$).

8. Пусть функция f одной независимой переменной дважды непрерывно дифференцируема. Проверьте, что функции $U_1(r,t) = \dfrac{1}{r} f\left(t - \dfrac{r}{a}\right)$ и $U_2(r,t) = \dfrac{1}{r} f\left(t + \dfrac{r}{a}\right)$ удовлетворяют волновому уравнению $u_{tt}(r,t) = a^2 \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial u(r,t)}{\partial r}\right) \equiv a^2 \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}\big(ru(r,t)\big)$ (U_1 и U_2 — сферические волны в $Oxyz$; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

9. В эйлеровых или в лагранжевых переменных было выведено уравнение теплопроводности? Уравнения поперечных колебаний струны и мембраны?

10. Проверьте, что функция $v(r) = \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{e^{kr\xi}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi$ удовлетворяет уравнению $\Delta v(r) - k^2 v(r) \equiv \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) - k^2 v = 0,\ r > 0$ (случай центральной симметрии на плоскости).

11. Пусть c — произвольная постоянная, а функция $U(x, t)$ удовлетворяет уравнению $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$. Покажите, что следующие сложные функции $U_i(x, t)$ также являются его решениями: $U_1(x, t) = U(x - c, t)$, $U_2(x, t) = U(x, t - c)$, $U_3(x, t) = U(x - ct, t) + c$, $U_4(x, t) = e^{-2c}U(e^{-c}x, e^{-3c}t)$ (этот список далеко не полон).

В задачах 12—21 найдите области на плоскости Oxy, в которых уравнение сохраняет тип.

Укажите тип уравнения в каждой такой области и приведите его к канонической форме.

12. $yu_{xx} + xu_{yy} = 0$.

13. $xu_{xx} + yu_{yy} = 0$.

14. $y^2u_{xx} - x^2u_{yy} = 0$.

15. $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$.

16. $x^2u_{xx} + y^2u_{yy} = 0$.

17. $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$.

18. $y^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + x^2u_{yy} = 0$.

19. $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$.

20. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y + u = 0$.

21. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 6u_x - 2u_y + u = 0$.

22. Определите тип уравнения $u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 6u_{zz} = 0$.

23. Пусть все коэффициенты линейного уравнения

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + bu + c_1u_x + c_2u_y + f(x, y) = 0$$

постоянны. После приведения к канонической форме выполните замену неизвестной функции: $u(x, y) = e^{\alpha x + \beta y}v(x, y)$, где α и β — параметры.

Как надо выбрать α и β, чтобы в канонической форме уравнения для новой функции v исчезли первые производные (для уравнений гиперболического или эллиптического типа)? Как надо выбрать α и β, чтобы в канонической форме уравнения исчезла одна из первых производных и сама искомая функция (для уравнений параболического типа)?

24. Найдите необходимое и достаточное условие существования дважды непрерывно дифференцируемого решения задачи Коши: $u_{xx} =$

$= f(x, y)$, $u(0, y) = \Psi_0(y)$, $u_x(0, y) = \Psi_1(y)$. Если решение существует, то будет ли оно единственным?

25. Проверьте, что задача Коши $xu_x + yu_y = 2xy$, $u\big|_{y=x} = x^2$ в области $x > 0$, $y > 0$ имеет решения $u(x,y) = xy + g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, где g — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, для которой $g(1) = 0$. Найдите характеристики.

26. Найдите единственное решение задачи Коши $xu_x + yu_y = 0$, $u\big|_{x=1} = y^2$.

27. Имеет ли действительные характеристики система уравнений Коши—Римана $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$?

Докажите, что каждая из дважды непрерывно дифференцируемых функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, удовлетворяющих этой системе, является решением уравнения Лапласа.

28. Пусть по протянутому вдоль оси Ox проводу пропускается электрический ток. Сила тока $i = i(x, t)$, напряжение $v = v(x, t)$ в точке x в момент времени t. Провод характеризуется рассчитанными на единицу длины погонным сопротивлением $R = \text{const}$, погонной индуктивностью $L = \text{const}$, погонной емкостью $C = \text{const}$ и погонным коэффициентом потерь $G = \text{const}$ (величина потерь через неидеальную изоляцию боковой поверхности провода в точке x пропорциональна напряжению в этой точке).

В предположении *малых колебаний* величин i и v выведите *систему телеграфных уравнений*

$$\begin{cases} i_x + Cv_t + Gv = 0, \\ v_x + Li_t + Ri = 0, \end{cases}$$

приближенно описывающую распространение электромагнитных сигналов в проводе. Найдите характеристики этой системы уравнений. Какова скорость распространения сигнала вдоль провода в такой модели?

Докажите, что для каждой из функций $i = i(x, t)$, $v = v(x, t)$, удовлетворяющих системе телеграфных уравнений, выполнено уравнение вида $w_{tt} = \dfrac{1}{LC} w_{xx} - \left(\dfrac{R}{L} + \dfrac{G}{C}\right) w_t - \dfrac{RG}{LC} w$. Что означает предположение $R = 0$ и $G = 0$ с точки зрения распространения волн по проводу? Выполните в последнем уравнении замену переменных $W(\xi, \eta) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\left(\frac{R}{L} + \frac{G}{C}\right)t} w(x,t)$, $\xi = x + \dfrac{1}{\sqrt{LC}} t$, $\eta = x - \dfrac{1}{\sqrt{LC}} t$.

Глава 2

ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМИ И КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Задача о нахождении конкретного решения уравнения в частных производных может быть осмысленной только если сформулированы дополнительные условия и определено, что понимать под ее решением. Естественно требовать, чтобы для входных данных из заранее оговоренного класса решение задачи существовало, было единственным и мало изменялось при малом изменении входной информации.

В данной главе рассмотрены математические формулировки простейших задач для уравнения теплопроводности, даны определения их решений и изучены основные свойства этих задач. Формулы, с помощью которых можно строить решения, требуют математического обоснования в соответствии с принятым определением решения задачи. Здесь дается такое обоснование при доказательстве теорем о существовании классических решений начально-краевой задачи и задачи Коши. Не во всех случаях может существовать решение, которое принято называть классическим; тогда надо изменить смысл, в котором следует понимать решение задачи.

2.1. Математические модели процессов распространения теплоты. Постановки задач для уравнения теплопроводности

2.1.1. Краевые условия

Уравнение теплопроводности

$$c(M)\rho(M)u_t = \operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad}u) + F(M,\ t) \qquad (2.1)$$

описывает температуру $u(M,\ t)$, зависящую от пространственных переменных и времени t. Это уравнение параболического типа.

Область изменения пространственных переменных в $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$ будем обозначать через D, а ее границу — через S. Напомним, что *областью* называется связное открытое множество. Говорят, что область D ограничена, если она целиком содержится внутри некоторого шара конечного радиуса ($D \subset \mathbb{R}^3$), или внутри круга конечного радиуса ($D \subset \mathbb{R}^2$), или является конечным интервалом ($D \subset \mathbb{R}^1$). Границу S будем считать гладкой (либо кусочно-гладкой) двусторонней поверхностью для $D \subset \mathbb{R}^3$ или гладкой (либо кусочно-гладкой) кривой для $D \subset \mathbb{R}^2$ — без особых точек и самопересечений; для $D \subset \mathbb{R}^1$ граница S может состоять из одной или двух точек. В каждой точке гладкости S зададим вектор внешней по отношению к D нормали $\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| = 1$; тогда определена производная $\dfrac{\partial}{\partial n}$ по нормали $\mathbf{n}$. Например, стержень длины l задаем как ограниченную область $D = \{0 < x < l\}$ с границей $S = \{x = 0\} \cup \{x = l\}$, $\left.\dfrac{\partial}{\partial n}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial}{\partial(-x)}\right|_{x=0}$, $\left.\dfrac{\partial}{\partial n}\right|_{x=l} = \left.\dfrac{\partial}{\partial x}\right|_{x=l}$; луч — неограниченная область $D = \{0 < x < +\infty\}$ с границей $S = \{x = 0\}$, $\left.\dfrac{\partial}{\partial n}\right|_{x=0} = \left.\dfrac{\partial}{\partial(-x)}\right|_{x=0}$; для прямой $D = \{-\infty < x < +\infty\}$ граница $S = \varnothing$; для круга $D = \{0 \le x^2 + y^2 < r_0\} = \{0 \le r < r_0,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$ границей является окружность $S = \{r = r_0\}$, $\left.\dfrac{\partial}{\partial n}\right|_S = \left.\dfrac{\partial}{\partial r}\right|_{r=r_0}$; для шара $D = \{0 \le x^2 + y^2 + z^2 < r_0\} = \{0 \le r < r_0, -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le \varphi < 2\pi\}$ границей является сфера $S = \{r = r_0\}$, $\left.\dfrac{\partial}{\partial n}\right|_S = \left.\dfrac{\partial}{\partial r}\right|_{r=r_0}$ и т. д.

Уравнение (2.1) было выведено лишь для *внутренних* точек области D, на границе S оно может и не выполняться. Чтобы выделить конкретный процесс теплопроводности в области D, нужна дополнительная информация, которая часто дается на границе S. Рассмотрим некоторые виды такой информации при $t \ge 0$.

Если известно, что граница S области D поддерживается при заданной температуре, то $u(P, t) = \mu(P, t)$, $P \in S$, $t \ge 0$, где $\mu(P, t)$ — заданная функция. Это условие называется ***краевым условием первого рода***, или условием Дирихле.

Если на S известен тепловой поток, то $-k(P)\dfrac{\partial u(P,t)}{\partial n} = \big(\mathbf{W}(P,t),\mathbf{n}(P)\big)$, $P \in S$, $t \geq 0$. Это условие можно записать в виде $\dfrac{\partial u(P,t)}{\partial n} = \nu(P,t)$, где $\nu(P,\ t)$ — заданная при $P \in S$, $t \geq 0$ функция. Его называют ***краевым условием второго рода***, или условием Неймана.

В краевом условии можно учесть обмен теплотой между телом D и внешней средой. Если известна температура внешней среды $u_{\text{среды}}(P,\ t)$, $P \in S$, $t \geq 0$, то по *закону Ньютона* обусловленный теплообменом поток теплоты через элемент границы dS пропорционален $(u(P,\ t) - u_{\text{среды}}(P,\ t))\,dS$. Если на границе S действуют еще и распределенные по ней источники теплоты, то они создают дополнительные потоки теплоты через S. В результате приходим к ***краевому условию третьего рода***: $\dfrac{\partial u(P,t)}{\partial n} + h(P)u(P,t) = \eta(P,t)$, $P \in S$, $t \geq 0$, где $h(P) > 0$ и $\eta(P,\ t)$ — заданные функции.

Пример 2.1. Возможны следующие краевые условия на концах стержня длины l:

$u(0,\ t) = \mu_1(t)$, $u(l,\ t) = \mu_2(t)$ — первая краевая задача;

$u_x(0,\ t) = \nu_1(t)$, $u_x(l,\ t) = \nu_2(t)$ — вторая краевая задача;

$u_x(0,\ t) - h_1 u(0,\ t) = \eta_1(t)$, $u_x(l,\ t) + h_2 u(l,\ t) = \eta_2(t)$, где $h_1 = \text{const} > 0$, $h_2 = \text{const} > 0$ — третья краевая задача. Возможны комбинации краевых условий разных типов на концах стержня. ■

Границу S называют *теплоизолированной*, если $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0$ всюду на S. Теплоизолирован может быть либо один конец стержня, например, $u_x(0,\ t) = 0$ или $u_x(l,\ t) = 0$, либо оба конца.

Для области $D \subset \mathbb{R}^2$ или $D \subset \mathbb{R}^3$ имеет смысл более общее краевое условие $\alpha(P)\dfrac{\partial u(P,t)}{\partial n} + \beta(P)u(P,t) = \chi(P,t)$, $P \in S$, $t \geq 0$, где $\alpha(P)$, $\beta(P)$, $\chi(P,\ t)$ — известные функции. Заданное функциями α, β, χ общее краевое условие может возникнуть, если в некоторых точках границы S известны значения искомой температуры, в других точках границы — плотности тепловых потоков, в третьих — происходит обмен теплотой с внешней средой по за-

кону Ньютона и действуют источники теплоты. Такое краевое условие называется *локальным*: оно записывается в каждой отдельной точке $P \in S$; возможны и нелокальные краевые условия, связывающие информацию о функции u в различных точках границы.

Замечание 2.1. Если $\alpha \equiv 0$, $\beta \neq 0$, то имеем краевое условие Дирихле. Если $\alpha \neq 0$, $\beta \equiv 0$, то — краевое условие Неймана. В задаче именно с третьим краевым условием (а не с краевым условием Дирихле и не с краевым условием Неймана) будем предполагать, что $\alpha(P) \neq 0$ всюду на S. Тогда краевое условие $\alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u = \chi$ можно записать в виде $\dfrac{\partial u}{\partial n} + hu = \eta$, где $h = \dfrac{\beta}{\alpha}$, $\eta = \dfrac{\chi}{\alpha}$. Здесь будем изучать задачи только с краевыми условиями этих трех типов. ■

Замечание 2.2. Рассмотренные краевые условия *линейны* относительно функции u. Возможны и нелинейные краевые условия, выражающие более сложные физические закономерности. ■

Замечание 2.3. Область D и ее граница S считались выше фиксированными. Но при изменении температуры тела может происходить изменение его физического состояния, например — переход из жидкой фазы в твердую или наоборот. На границе S фазового перехода сохраняется постоянная температура затвердевания (или плавления), но сама граница S движется, разделяя два фазовых состояния вещества. По разные стороны S имеем разные наборы физических параметров $(c,\ \rho,\ k)$, определяющих процессы теплопроводности, а на самой границе S должен выполняться баланс теплоты, учитывающий теплоту затвердевания (или плавления). В задаче о фазовом переходе требуется найти не только температуры двух фаз вещества, но и закон движения разделяющей их неизвестной границы $S(t)$. ■

2.1.2. Начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности. Определения их классических решений

Далее будут изучены задачи для уравнения

$$u_t = a^2 \Delta u + f(M,\ t),\ u = u(M,\ t), \tag{2.2}$$

с постоянными коэффициентами. Подчеркнем, однако, что их основные свойства справедливы и для аналогичных задач с уравнением (2.1). Если область D изменения пространственных переменных $M \in D$ имеет границу S, то краевого условия на S может оказаться недостаточно для определения конкретного решения уравнения (2.2). Поставим еще *начальное условие* $u(M, 0) = \varphi(M)$ для всех точек $M \in D \cup S$, где φ — заданная функция: известна температура в момент времени $t = 0$. Поскольку в пространстве всех независимых переменных гиперплоскость $t = 0$ является характеристикой уравнения (2.2), не имеет смысла при $t = 0$ задавать еще, например, значения $u_t(M, 0)$.

Пусть фиксирована *ограниченная область* D с замкнутой границей S. *Полуоткрытым цилиндром* Q_T назовем множество изменения всех независимых переменных вида $Q_T = D \times (0, T] = \{(M, t) | M \in D, t \in (0, T]\}$, замкнутым цилиндром — множество $\overline{Q}_T = \overline{D} \times [0, T] = \{(M, t) | M \in \overline{D}, t \in [0, T]\}$, где $\overline{D} = D \cup S$. Если $T = +\infty$, то полагаем $Q = D \times (0, +\infty)$. Кроме того, будем обозначать $\Gamma_T = S \times \{0 < t < T\}$.

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности ставится следующим образом:

$$u_t = a^2 \Delta u + f(M, t), \ (M, t) \in Q, \tag{2.2}$$

$$u(M, 0) = \varphi(M), \ M \in \overline{D}, \tag{2.3}$$

$$\alpha \frac{\partial u(P,t)}{\partial n} + \beta u(P,t) = \chi(P,t), \ P \in S, \ t \in [0, +\infty), \tag{2.4}$$

$\alpha + \beta > 0$, $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$.

Фиксируем произвольное $T > 0$. Дадим определения *классических решений* начально-краевых задач в случае $D \subset \mathbb{R}^3$ в $Oxyz$; для $D \subset \mathbb{R}^2$ и $D \subset \mathbb{R}^1$ определения аналогичны.

Определение 2.1. ***Классическим решением первой начально-краевой задачи*** ($\alpha \equiv 0$, $\beta \neq 0$) называется функция $u(M, t)$, которая удовлетворяет следующим требованиям:

- $u(M, t)$ непрерывна в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$;
- $u(M, t)$ имеет непрерывные производные u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz} ($M = M(x, y, z)$) в открытом цилиндре Q_T и удовлетворяет в нем уравнению (2.2);
- $u(M, t)$ принимает заданные в (2.3) значения при $t = 0$;
- $u(M, t)$ удовлетворяет краевому условию $u(P, t) = \mu(P, t)$, $P \in S$, при $t \geq 0$.

$$u(M,t)\in C\left(\overline{Q}_T\right)\cap C^{2,1}\left(Q_T\right).$$

Определение 2.2. ***Классическим решением второй начально-краевой задачи*** $(\alpha\neq 0, \beta\equiv 0)$ называется функция $u(M,\,t)$, которая удовлетворяет следующим требованиям:

- $u(M,\,t)$ непрерывна в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$;
- $u(M,\,t)$ имеет непрерывные производные u_x, u_y, u_z $(M = M(x,\,y,\,z))$ в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$ (кроме, быть может, внутренних точек области D в момент времени $t=0$);
- $u(M,\,t)$ имеет непрерывные производные u_t, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz} в открытом цилиндре Q_T и удовлетворяет в нем уравнению (2.2);
- $u(M,\,t)$ принимает заданные в (2.3) значения при $t=0$;
- $u(M,\,t)$ удовлетворяет краевому условию $\dfrac{\partial u(P,t)}{\partial n}=\nu(P,t)$, $P\in S$, при $t\geq 0$.

$$u(M,t)\in C\left(\overline{Q}_T\right)\cap C^{1,0}\left(Q_T\cup\Gamma_T\right)\cap C^{2,1}\left(Q_T\right).$$

Определение 2.3. ***Классическим решением третьей начально-краевой задачи*** $(\alpha\neq 0)$ называется функция $u(M,\,t)$, которая удовлетворяет требованиям, приведенным в определении 2.2, но с иным краевым условием: $\dfrac{\partial u(P,t)}{\partial n}+h(P)u(P,t)=\chi(P,t)$, $P\in S$, при $t\geq 0$.

Говоря о классических решениях, предполагаем, что заданные функции f, φ, μ, ν, h, χ непрерывны.

Замечание 2.4. Необходимым условием существования классического решения начально-краевой задачи (2.2) — (2.4) является согласование начального (2.3) и краевого (2.4) условий:

$$\alpha\frac{\partial\varphi(P)}{\partial n}+\beta\varphi(P)=\chi(P,0),\ \ P\in S.\ \blacksquare$$

Замечание 2.5. Часто возникают задачи, решения которых не могут удовлетворять требованиям, предъявляемым к *классическим* решениям. Например, может не выполняться согласование начального и краевого условий. Такие решения надо понимать в некотором *обобщенном* смысле. ■

Не следует требовать выполнения уравнения (2.2) при $t=0$: такое требование накладывало бы ограничения на функцию φ и

существенно сузило бы класс функций u, которые желательно считать решениями.

Требование непрерывности решения в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$ существенно для единственности решения задачи.

Аналогично можно определить классическое решение начально-краевой задачи и для более общего уравнения (2.1), а также дать определение классического решения задачи с общим краевым условием при $\alpha = \alpha(P)$ и $\beta = \beta(P)$. Тогда необходимо потребовать непрерывности заданных функций c, ρ, k, F, φ, α, β, χ; достаточно потребовать непрерывности производных u_x, u_y, u_z лишь в тех точках $P \in S$, где $\alpha(P) \neq 0$.

2.1.3. Асимптотические случаи задач для уравнения теплопроводности

Область D может быть и *неограниченной*. Рассмотрим некоторые предельные (асимптотические) случаи на примерах задач с одной пространственной переменной.

Допустим, что длина стержня достаточно велика, а изучается распределение температуры стержня вдали от его концов и в тот промежуток времени, за который краевые условия не успеют существенно повлиять на температуру. Тогда получим задачу на всей числовой оси:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,\, t),\ x \in (-\infty,\, +\infty),\ t > 0,$$
$$u(x,\, 0) = \varphi(x),\ x \in (-\infty,\, +\infty).$$

Эта задача называется задачей с начальным условием или *задачей Коши* для уравнения теплопроводности.

Можно сформулировать и другую предельную задачу: краевое условие на левом конце сказывается на температуре рассматриваемого участка стержня, а краевое условие на правом конце — нет. Тогда получаем задачу на луче:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,\, t),\ x \in (0,\, +\infty),\ t > 0,$$
$$u(x,\, 0) = \varphi(x),\ x \in [0,\, +\infty),$$

первая краевая задача: $u(0,\, t) = \mu(t),\ t \geq 0$;

вторая краевая задача: $u_x(0,\, t) = \nu(t),\ t \geq 0$;

третья краевая задача: $u_x(0,\, t) - hu(0,\, t) = \eta(t),\ t \geq 0,\ h > 0$.

Аналогичные задачи можно поставить и в случае нескольких пространственных переменных, например, задачу Коши во всем пространстве $\mathbb{R}^3$.

Для ограниченной или неограниченной области D с границей S возможны задачи с краевым условием, но без начального: если изучается процесс теплопроводности в моменты времени, далекие от начального, то влияние начальных условий практически перестает сказываться на изучаемой температуре; она будет определяться зависящим от времени краевым условием, которое можно считать заданным при всех $t > -\infty$.

Пример 2.2. Задаче без начального условия

$$u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < +\infty,\ t > -\infty,\ a = \text{const} > 0,$$

$$u(0,\ t) = u_0 \cos(\omega t),\ t > -\infty,\ u_0 = \text{const},\ \omega = \text{const} \geq 0,$$

удовлетворяют функции $u_1(x,t) = u_0 \exp\left\{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}\frac{x}{a}\right\} \times$

$\times \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2}}\frac{x}{a}\right)$, $u_2(x,t) = u_0 \exp\left\{\sqrt{\frac{\omega}{2}}\frac{x}{a}\right\} \cos\left(\omega t + \sqrt{\frac{\omega}{2}}\frac{x}{a}\right)$ (проверьте!). Если под решением понимать *ограниченную функцию* (температура не может принимать сколь угодно большие значения), то имеем единственное решение $u_1(x,\ t)$. ■

2.1.4. Понятие корректности задачи

Для задач всех указанных типов надо определить, какую функцию u следует считать решением. При этом возникают вопросы о *существовании* решения, его *единственности* и непрерывной зависимости решения от входной информации задачи (т.е. об *устойчивости* решения по отношению к малым возмущениям функций f, φ, μ, ν, h, χ: малые изменения этих функций должны приводить к малым изменениям решения). Если решение существует, единственно и устойчиво, то задачу называют *корректно поставленной.*

Далее будут доказаны основные факты, выражающие корректность начально-краевых задач для уравнения теплопроводности в ограниченной области D. Для корректности задач в неограниченных областях эти задачи надо уточнить. Например, в задаче Коши достаточно потребовать ограниченности решения, а следовательно, и ограниченности функции φ. Одновременно опишем и методы решения этих задач.

Замечание 2.6. Изучение теплофизических процессов может приводить и к *некорректным* задачам. Пусть, например,

$$u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ 0 < t \le T;\ u(0,\ t) = 0,\ u(l,\ t) = 0,\ 0 \le t \le T,$$

и из измерений известна температура в момент времени $t = T$: $u(x,\ T) = U(x),\ 0 \le x \le l$. Требуется найти $\varphi(x) = u(x,\ 0)$ в начальный момент времени $t = 0$ при всех $0 \le x \le l$. Эта, и многие другие задачи, связанные с разнообразными измерениями, некорректны и требуют привлечения специальных методов исследования. ■

2.2. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теоремы сравнения. Единственность и устойчивость решения первой начально-краевой задачи

2.2.1. Принцип максимума

Докажем основную теорему, из которой вытекают важнейшие следствия, описывающие свойства решений уравнения теплопроводности. Пусть D — *ограниченная область*. Фиксируем произвольное $T > 0$.

Теорема 2.1 (принцип максимума). Классическое решение уравнения теплопроводности $u_t = a^2 \Delta u$, $(M,\ t) \in Q_T$, непрерывное в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$, внутри этого цилиндра не может принимать значения, бóльшие, чем значения при $t = 0$ или на границе S области D.

Доказательство.

Введем обозначение $A = \max\left\{\underset{M \in \overline{D}}{u(M,0)};\ \underset{P \in S;\, t \in [0,T]}{u(P,t)}\right\}$. Надо доказать, что $u(M,\ t) \le A$ для всех точек $(M,t) \in \overline{Q}_T$. Это утверждение будем доказывать от противного. Пусть в точке $(M_0,\ t_0) \in Q_T$ функция $u(M,\ t)$ достигает своего максимального значения, большего A, т. е. $u(M_0,\ t_0) = A + \varepsilon,\ \varepsilon > 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию $v(M,\ t) = u(M,\ t) + \alpha(t_0 - t),\ \alpha > 0$. Очевидно, что $v(M_0,\ t_0) = u(M_0,\ t_0) = A + \varepsilon$. Теперь оценим максимальное значение $v(M,\ t)$ на границе S области $\overline{D}$ или в начальный момент времени: $\max\left\{\underset{M \in \overline{D}}{v(M,0)};\ \underset{P \in S;\, t \in [0,T]}{v(P,t)}\right\} \le A + \alpha T < A + \dfrac{\varepsilon}{2}$, если $\alpha < \dfrac{\varepsilon}{2T}$.

Таким образом, максимальное значение функции $v(M,\, t)$ на границе цилиндра меньше, чем некоторое ее значение внутри. Следовательно, существует точка $(M_1,\, t_1)$ внутри цилиндра, в которой функция $v(M,\, t)$ должна достигать своего максимума: $(M_1,\, t_1) \in Q_T$, $v(M_1,\, t_1) \geq v(M_0,\, t_0) = A + \varepsilon$. Так как $(M_1,\, t_1)$ — точка максимума, то должны выполняться условия для первых производных: $\operatorname{grad}_M v(M_1,\, t_1) = 0$, $\left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_1 \\ M=M_1}} \geq 0$ ($\left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_1 \\ M=M_1}} = 0$, если $t \neq T$ или $\left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{\substack{t=T \\ M=M_1}} \geq 0$) и для вторых производных: $\Delta_M v(M_1,\, t_1) \leq 0$.

Посмотрим, что это дает для функции $u(M,\, t)$:

$$u(M,\, t) = v(M,\, t) - \alpha(t_0 - t),\ \alpha > 0,$$

$$\operatorname{grad}_M u(M_1,\, t_1) = \operatorname{grad}_M v(M_1,\, t_1) = 0,$$

$$\Delta_M u(M_1,\, t_1) = \Delta_M v(M_1,\, t_1) \leq 0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\substack{M=M_1 \\ t=t_1}} = \left(\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{\substack{M=M_1 \\ t=t_1}} + \alpha\right) \geq \alpha > 0.$$

Таким образом, в точке $(M_1,\, t_1)$, лежащей внутри области Q_T, $\Delta_M u \leq 0$, $u_t > 0$, т. е. не выполняется уравнение теплопроводности. Пришли к противоречию. ■

Замечание 2.7. Принцип максимума является выражением того очевидного факта, что теплота перемещается от мест с большей температурой к местам с меньшей температурой, т. е. «растекается». При отсутствии источников и стоков теплоты это приводит к доказанному только что утверждению. ■

2.2.2. Принцип экстремума

Для однородного уравнения теплопроводности справедлив также *принцип минимума.*

Теорема 2.2 (принцип минимума). Классическое решение уравнения теплопроводности $u_t = a^2 \Delta u$, $(M,\, t) \in Q_T$, непрерывное в замкнутом цилиндре $\overline{Q}_T$, внутри этого цилиндра не может принимать значения, меньшие, чем значения при $t = 0$ или на границе S области D.

Доказательство. Функция $u_1(M,\,t) = -u(M,\,t)$ — также решение уравнения теплопроводности. Максимальное значение для функции $u_1(M,\,t)$является минимальным для функции $u(M,\,t)$. Следовательно, справедливость этой теоремы следует из предыдущей. ■

Следствие. Из теорем 2.1 и 2.2 следует ***принцип экстремума***: значения указанной функции $u(M,\,t)$ для всех точек $(M,t)\in\overline{Q}_T$ лежат между максимальным и минимальным ее значениями на *границе*:

$$\min\left\{\underset{M\in\bar{D}}{u(M,0)};\ \underset{P\in S;t\in[0,T]}{u(P,t)}\right\}\le u(M,t)\le\max\left\{\underset{M\in\bar{D}}{u(M,0)};\ \underset{P\in S;t\in[0,T]}{u(P,t)}\right\}.\ \blacksquare$$

Замечание 2.8. Функция $u(M,\,t)=\text{const}$ является решением уравнения $u_t = a^2\Delta u$ и не противоречит принципам максимума и минимума. ■

Замечание 2.9. Справедлив «*сильный*» принцип максимума и минимума: за исключением случая $u=\text{const}$ функция $u(M,\,t)$, удовлетворяющая условиям принципов максимума и минимума, не может принимать своих максимума и минимума в Q_T в точках множества $D\times\{0<t\le T\}$. ■

Пример 2.3. Для любого $T>0$ функция $u(x,\,t)=x^2+2a^2t$ удовлетворяет уравнению $u_t=a^2u_{xx}$ в $Q_T=\{0<x<l,\,0<t\le T\}$ и непрерывна в его замыкании $\overline{Q}_T=\{0\le x\le l,0\le t\le T\}$. Функция $u(x,\,t)$ принимает в $\overline{Q}_T$ свой максимум в точке $x=l,\,t=T$, а свой минимум в точке $x=0,\,t=0$. ■

Замечание 2.10. Принципы максимума и минимума имеют место и для более общего уравнения $c\rho u_t=\operatorname{div}(k(M)\operatorname{grad}u)-qu$, $q\ge 0,\ c>0,\ \rho>0,\ k>0$. ■

2.2.3. Теоремы сравнения

Теорема 2.3. Пусть функции $u_i(M,\,t)$, $i=1,\,2$, удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности $u_t=a^2\Delta u$ в Q_T, непрерывны в $\overline{Q}_T$ и удовлетворяют условиям $u_1(M,\,0)\ge u_2(M,\,0)$, $M\in\bar{D}$, и $u_1(P,\,t)\ge u_2(P,\,t)$, $P\in S$, $t\in[0,\,T]$. Тогда $u_1(M,\,t)\ge u_2(M,\,t)$ во всех точках замкнутого цилиндра $\overline{Q}_T$.

Доказательство. Введем функцию $v(M, t) = u_1(M, t) - u_2(M, t)$. Пусть функция $v(M,t) \not\equiv 0$, в противном случае утверждение теоремы очевидно. Так как уравнение $u_t = a^2 \Delta u$ линейно и однородно, то линейная комбинация решений также будет решением этого уравнения.

Следовательно, функция $v(M, t)$ является решением уравнения $v_t = a^2 \Delta v$ и $v(M,t) \in C\left(\overline{Q}_T\right)$, т.е. функция $v(M, t)$ — классическое решение уравнения $v_t = a^2 \Delta v$, и выполнены неравенства $v(M,0) \geq 0, M \in \overline{D}$, и $v(P, t) \geq 0$, $P \in S$, $t \in [0, T]$. Для функции $v(M, t)$ выполняется принцип минимума. Следовательно, $v(M, t) \geq$ ≥ 0, $(M,t) \in \overline{Q}_T$, и $u_1(M, t) \geq u_2(M, t)$, $(M,t) \in \overline{Q}_T$. ■

Теорема 2.4. Пусть функции $u_i(M, t)$, $i = 1, 2$, удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности $u_t = a^2 \Delta u$ в Q_T, непрерывны в $\overline{Q}_T$ и удовлетворяют условиям $|u_1(M, 0) - u_2(M, 0)| \leq \varepsilon$, $M \in \overline{D}$, и $|u_1(P, t) - u_2(P, t)| \leq \varepsilon$, $P \in S$, $t \in [0, T]$. Тогда $|u_1(M, t) -$ $- u_2(M, t)| \leq \varepsilon$ во всех точках замкнутого цилиндра $\overline{Q}_T$.

Доказательство. Рассмотрим три функции: $v_1(M, t) =$ $= -\varepsilon$, $v_3(M, t) = \varepsilon$ и $v_2(M, t) = u_1(M, t) - u_2(M, t)$. Все функции $v_i(M, t)$, $i = 1, 2, 3$, удовлетворяют уравнению $v_t = a^2 \Delta v$, принадлежат классу непрерывных функций $C\left(\overline{Q}_T\right)$ и удовлетворяют условиям $v_1(M, 0) \leq v_2(M, 0) \leq v_3(M, 0)$, $M \in \overline{D}$, и $v_1(P, t) \leq v_2(P, t) \leq v_3(P, t)$, $P \in S$, $t \in [0, t]$. Из принципов максимума и минимума следует $v_1(M, t) \leq v_2(M, t) \leq v_3(M, t)$, $(M,t) \in \overline{Q}_T$. ■

2.2.4. Единственность решения первой начально-краевой задачи

Первая начально-краевая задача для уравнения теплопроводности состоит в нахождении функции $u(M, t)$, удовлетворяющей следующим требованиям:

$$u_t = a^2 \Delta u + f(M, t), \ (M, t) \in Q, \tag{2.5}$$

$$u(M, 0) = \varphi(M), \ M \in \overline{D}, \tag{2.6}$$

$$u(P, t) = \mu(P, t), \ P \in S, \ t \in [0, +\infty), \tag{2.7}$$

$$Q = Q_{T=+\infty} = D \times (0, +\infty).$$

Теорема 2.5. Задача (2.5)—(2.7) может иметь только одно классическое решение.

Доказательство. Допустим, что существуют две функции $u_i(M, t)$, $i = 1, 2$, являющиеся классическими решениями задачи (2.5), (2.6), (2.7). Пусть $T > 0$. Функции $u_i(M,t) \in C\left(\overline{Q}_T\right) \cap C^{2,1}(Q_T)$, $i = 1, 2$. Тогда функция $v(M, t) = u_1(M, t) - u_2(M, t)$ является классическим решением задачи

$$v_t = a^2 \Delta v, \ (M, t) \in Q_T,$$

$$v(M, 0) = 0, \ M \in \overline{D},$$

$$v(P, t) = 0, \ P \in S, \ t \in [0, T], \ v \in C\left(\overline{Q}_T\right).$$

Для функции $v(M, t)$ справедливы принципы максимума и минимума (для функций $u_i(M, t)$, $i = 1, 2$, принципы максимума и минимума неприменимы, так как они удовлетворяют неоднородному уравнению). Следовательно, $v(M, t)$ удовлетворяет принципу экстремума: $0 \leq v(M, t) \leq 0$, т.е. $v(M, t) \equiv 0$. ■

2.2.5. Устойчивость решения первой начально-краевой задачи

Из принципа максимума (при любом $T > 0$) также следует теорема.

Теорема 2.6. Классическое решение задачи (2.5), (2.6), (2.7) устойчиво по начальным и граничным данным.

Доказательство. Пусть функции $u_i(M, t)$, $i = 1, 2$, являются решениями задач

$$u_t = a^2 \Delta u + f(M, t), \ (M, t) \in Q_T,$$

$$u(M,0) = \varphi_i(M), M \in \overline{D},$$

$$u(P, t) = \mu_i(P, t), \ P \in S, \ t \in [0, T], \ i = 1, 2.$$

Предположим, что $|\varphi_1(M) - \varphi_2(M)| \leq \varepsilon, \ M \in \overline{D}$, и $|\mu_1(P, t) - \mu_2(P, t)| \leq \varepsilon, \ P \in S, \ t \in [0, T]$. Надо доказать, что $|u_1(M, t) - u_2(M, t)| \leq \varepsilon$ для всех $(M,t) \in Q_T$. Рассмотрим функцию $v(M, t) = u_1(M, t) - u_2(M, t)$, которая является решением задачи

$$v_t = a^2 \Delta v, \ (M, t) \in Q_T,$$

$$v(M,0)=\varphi_1(M)-\varphi_2(M), M\in\bar{D},$$

$$v(P,\ t)\ =\ \mu_1(P,\ t)\ -\ \mu_2(P,\ t),\ P\in S,\ t\in[0,\ T].$$

Так как функция $v(M,\ t)$ в граничных и начальных точках удовлетворяет условиям $|v(M,0)|\le\varepsilon, M\in\bar{D},$ и $|v(P,\ t)|\le\varepsilon,\ P\in S,\ t\in$ $\in[0,\ T]$, то из теоремы 2.4 следует, что $|v(M,\ t)|\le\varepsilon,\ (M,t)\in\bar{Q}_T$. ■

Замечание 2.11. Можно разными (и неэквивалентными!) способами оценивать величину отклонений одной функции от другой.

В теореме 2.4 было доказано, что если $\max\limits_{M\in\bar{D}}|\varphi_1(M)-\varphi_2(M)|\le\varepsilon$ и $\max\limits_{P\in S,t\in[0,T]}|\mu_1(P,t)-\mu_2(P,t)|\le\varepsilon,$ то $\max\limits_{(M,t)\in\bar{Q}_T}|u_1(M,t)-u_2(M,t)|\le\varepsilon.$

Выбор максимума модуля разности двух непрерывных функций в качестве величины их отклонения друг от друга входит, по существу, в постановку исходной задачи. Такой выбор является естественным для задач с классическими решениями. ■

Замечание 2.12. Классическое решение задачи (2.5)—(2.7) устойчиво и по отношению к возмущениям функции $f(M,\ t)$ в (2.5). Это следует из теорем, определенным образом обобщающих принципы максимума и минимума на случай неоднородного уравнения (2.5). (Непосредственно на случай (2.5) доказанные принципы максимума и минимума не переносятся!) ■

2.3. Построение решений начально-краевых задач для уравнения теплопроводности методом разделения переменных

2.3.1. Редукция начально-краевых задач

Метод построения решений, который будет рассмотрен, является весьма общим; он применим не только к задачам для уравнения теплопроводности. Идею метода и форму конструируемого решения объясним на примере задачи для уравнения теплопроводности на отрезке $0\le x\le l$.

Прежде чем перейти к изложению метода разделения переменных, заметим, что задачу относительно функции $u(x,\ t)$ для

неоднородного уравнения теплопроводности с *ненулевыми* краевыми условиями можно заменить на две более простые задачи. Для этого прежде всего необходимо выполнить замену искомой функции $u(x,\ t) = v(x,\ t) + U(x,\ t)$, где $U(x,\ t)$ подбирается удовлетворяющей заданным ненулевым краевым условиям (такую функцию U можно выбрать многими способами). Тогда для новой искомой функции $v(x,\ t)$ краевые условия будут нулевыми. Пусть, например, дана задача

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + \tilde{f}(x,t), 0 < x < l, t > 0, \\ u(x,0) = \tilde{\varphi}(x), 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t), t \ge 0, \\ \tilde{\varphi}(0) = \mu_1(0), \tilde{\varphi}(l) = \mu_2(0). \end{cases}$$

Выполним замену искомой функции:

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{x}{l}\big(\mu_2(t) - \mu_1(t)\big) + \mu_1(t).$$

Тогда относительно $v(x,\ t)$ получим задачу вида

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t), 0 < x < l, t > 0, \\ v(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le l, \\ v(0,t) = 0, v(l,t) = 0, t \ge 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Решение задачи (2.8) можно представить суммой решений двух задач:

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx}, 0 < x < l, t > 0, \\ v(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le l, \\ v(0,t) = 0, v(l,t) = 0, t \ge 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

и

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + f(x,t), 0 < x < l, t > 0, \\ v(x,0) = 0, 0 \le x \le l, \\ v(0,t) = 0, v(l,t) = 0, t \ge 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

Такое упрощение исходной задачи основано на ее *линейности* относительно искомой функции $u(x,\ t)$.

Задача 2.1. Выполните описанное упрощение исходной задачи для случаев других комбинаций краевых условий первого

и/или второго рода при $x = 0$ и $x = l$. Ищите функцию $U(x, t)$, линейную по x, или в виде многочлена второй степени относительно x. ■

Будем теперь вместо задач общего вида рассматривать задачи вида (2.9) и (2.10).

2.3.2. Метод разделения переменных в задачах для однородного уравнения

Метод разделения переменных является одним из основных методов построения решений линейных начально-краевых задач для уравнений в частных производных. Идея метода состоит в том, что нетривиальные частные решения данного уравнения с независимыми переменными x и t ищутся в виде произведения $X(x)\,T(t)$, где X зависит только от x, а T — только от t. Это сводит задачу для уравнения в частных производных к некоторой совокупности задач для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Решим методом разделения переменных первую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0;$$

$$u(0,\ t) = 0,\ u(l,\ t) = 0,\ t \geq 0;$$

$$u(x,\ 0) = \varphi(x),\ 0 \leq x \leq l.$$

Сначала найдем частные решения уравнения вида $X(x)\,T(t)$, которые удовлетворяют краевым условиям. Если подставить произведение $X(x)\,T(t)$ в уравнение и разделить его на $a^2 X(x)\,T(t)$, то получим равенство

$$\frac{X''_{xx}(x)}{X(x)} = \frac{T'_t(t)}{a^2 T(t)},$$

левая часть которого зависит только от x, а правая — только от t. Поскольку x и t являются независимыми переменными, равенство возможно только если обе его части равны постоянной. Обозначим эту действительную постоянную через $(-\lambda)$ и запишем отдельно два уравнения относительно $X(x)$ и $T(t)$:

$$X''_{xx}(x) + \lambda X(x) = 0,\ \ T'_t(t) + a^2 \lambda T(t) = 0.$$

Подставим теперь произведение $X(x)\,T(t)$ в краевые условия и вспомним, что они выполнены при всех $t \geq 0$. Отсюда для рассматриваемой начально-краевой задачи получаем $X(0) = 0$, $X(l) = 0$. Чтобы найти интересующие нас функции $X(x)$, надо решить *краевую задачу на собственные значения* для обыкновенного дифференциального уравнения относительно $X(x)$:

$$\begin{cases} X''_{xx}(x) + \lambda X(x) = 0, \;\; 0 \leq x \leq l; \\ X(0) = 0, X(l) = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Задача (2.11) называется задачей Штурма — Лиувилля; в ней требуется найти все значения параметра λ, при которых (2.11) имеет нетривиальные решения $X(x)$, и указать все эти решения. Такие значения λ называются ***собственными значениями***, а отвечающие им $X(x)$, не равные тождественно нулю, — ***собственными функциями*** задачи (2.11) (они определены с точностью до ненулевого постоянного множителя).

При $\lambda < 0$ общее решение дифференциального уравнения второго порядка в (2.11) имеет вид $Ae^{-\sqrt{-\lambda}x} + Be^{\sqrt{-\lambda}x}$; из краевых условий в (2.11) получаем $A = B = 0$ (проверьте!). При $\lambda = 0$ общее решение уравнения имеет вид $Ax + B$, а подстановка его в краевые условия снова дает $A = B = 0$. В случае $\lambda > 0$ общее решение дифференциального уравнения имеет вид $A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$, а из краевых условий получаем $A = 0$, $B\sin\left(\sqrt{\lambda}l\right) = 0$. Здесь нельзя положить $B = 0$; интересующие нас значения λ найдем из последнего тригонометрического уравнения. Для рассматриваемых краевых условий первого рода

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), n = 1, 2, 3, \ldots$$

Если задача Штурма — Лиувилля решена, то уравнение для $T(t)$ надо решать только при тех λ, которые оказались собственными значениями задачи для $X(x)$. При каждом таком λ_n надо найти общее решение уравнения относительно $T(t)$. В силу линейности исходной задачи сумма произведений $X_n(x)\,T_n(t)$, отвечающих различным λ_n, будет удовлетворять уравнению в частных производных и нулевым краевым условиям исходной начально-краевой задачи. Чтобы найти окончательное ее решение, надо выбрать коэффициенты этой линейной комбинации, исходя из оставшегося пока неиспользованным начального условия. Иными словами, из всевозможных решений исходного уравнения

$u(x,t)=\sum_n X_n(x)T_n(t)$, которые удовлетворяют краевым усло-

виям , надо отобрать единственное решение, удовлетворяющее начальному условию. Для рассматриваемых краевых условий первого рода получаем

$$T_n(t)=C_n\exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t\right\},\ C_n=\text{const},\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

и удовлетворяющее краевым условиям общее решение уравнения теплопроводности $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t\right\}$.

Коэффициенты C_n можно найти из начального условия $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=\varphi(x)$. Для этого надо разложить заданную на $[0,\ l]$ функцию $\varphi(x)$ в ряд Фурье по системе функций $\{X_n(x)\}$ на указанном отрезке (в рассматриваемом случае — по системе $\left\{\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$). Тогда C_n равны коэффициентам Фурье функции $\varphi(x)$ по системе $\{X_n(x)\}$.

Построенное решение является пока лишь формальным: надо еще доказать, что оно удовлетворяет требованиям, предъявляемым к классическим решениям. В частности, надо доказать, что полученный функциональный ряд можно почленно дифференцировать по t и два раза — по x. Для этого нужны некоторые дополнительные предположения о функции $\varphi(x)$.

2.3.3. Ортогональность системы собственных функций

Раскладывая решение начально-краевой задачи в ряд Фурье по собственным функциям $X_n(x)$, предполагаем, что введено некоторое скалярное произведение функций. Скалярное произведение двух заданных на $[0,\ l]$ действительных функций $p(x)$ и $g(x)$ можно определить выражением $(p,g)=\int_0^l p(\xi)g(\xi)d\xi$. Евклидова норма функции $p(x)$ — это $\|p\|=\sqrt{(p,p)}$. В рассмотренной первой начально-краевой задаче легко убедиться, что $(X_i,\ X_j)=0$ при

$i \neq j$, т.е. система $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна. Отметим, что $\|X_n\|^2 = \int_0^l \sin^2 \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi = \frac{l}{2}$. Коэффициенты Фурье функции $\varphi(x)$ по ненормированной системе элементов $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ определяются так: $\varphi_n = \frac{(\varphi, X_n)}{\|X_n\|^2}$, $n = 1, 2, \ldots$

2.3.4. Зависимость системы собственных функций от краевых условий

Задача 2.2. Разделите переменные в начально-краевых задачах для однородного уравнения теплопроводности на отрезке $0 \leq x \leq l$ с нулевыми краевыми условиями других типов (рассмотрите все комбинации краевых условий первого и второго рода). В каждом случае запишите задачу Штурма—Лиувилля, отвечающую исходной задаче для уравнения в частных производных; найдите все собственные значения и собственные функции. Заметьте, что для второй краевой задачи $\lambda_0 = 0$ является собственным значением.

Проверьте, что каждая из построенных систем собственных функций $\{X_n(x)\}$ ортогональна. Найдите $\|X_n\|^2$.

Запишите формальное решение каждой из указанных начально-краевых задач для уравнения теплопроводности в виде ряда Фурье по своей системе собственных функций. ■

2.3.5. Метод разделения переменных в задачах для неоднородного уравнения

Чтобы решить начально-краевую задачу для неоднородного уравнения $u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t)$ с нулевыми краевыми условиями и нулевым начальным условием, решим сначала задачу Штурма—Лиувилля, отвечающую однородному уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$ с теми же краевыми условиями. Разложим $f(x, t)$ при каждом фиксированном t в ряд Фурье по системе $\{X_n(x)\}$ собственных функций задачи Штурма—Лиувилля:

$$f(x,t) = \sum_n f_n(t) X_n(x),$$

где $f_n(t)=\dfrac{(f,X_n)}{\|X_n\|^2}$ — коэффициенты Фурье заданной функции f (здесь t играет роль параметра). Теперь решение исходной задачи можно искать в виде ряда Фурье по системе $\{X_n(x)\}$: $u(x,t)=\sum_n T_n(t)X_n(x)$, где коэффициенты Фурье $T_n(t)$ подлежат определению. Чтобы найти их, подставим предполагаемый вид решения в уравнение. Например, в случае первой краевой задачи получим $\sum_{n=1}^{\infty}T_n'(t)\sin\dfrac{\pi n}{l}x=-a^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2\sin\dfrac{\pi n}{l}x+$

$+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\dfrac{\pi n}{l}x$. Если $u(x,0)\equiv 0$, то $\sum_n T_n(0)\sin\dfrac{\pi n}{l}x\equiv 0$. Отсюда при каждом $n=1,2,\ldots$ получаем для нахождения $T_n(t)$ задачу Коши: $\begin{cases}T_n'(t)+a^2\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2T_n(t)=f_n(t),t\geq 0;\\ T_n(0)=0.\end{cases}$

Задача 2.3. Найти функцию $u(x,\ t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u_t=a^2u_{xx}+f_0,\ 0<x<l,\ t>0,\ f_0=\text{const},$$

$$u(0,\ t)=0,\ u(l,\ t)=0,\ t>0,$$

$$u(x,\ 0)=0,\ 0\leq x\leq l.$$

Решение.

$X_n(x)=\sin\dfrac{\pi n}{l}x, n=1,2,3,\ldots,$ — собственные функции задачи Штурма—Лиувилля.

Коэффициенты Фурье постоянной функции f_0 по $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ суть следующие числа: $f_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l f_0\sin\dfrac{\pi n}{l}xdx=\begin{cases}0,\text{если } n=2k,\\ \dfrac{4f_0}{\pi n},\text{если } n=2k+1.\end{cases}$

Разложение ее в ряд Фурье по $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на отрезке $0\leq x\leq l$ имеет вид $f_0=\dfrac{4f_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\pi(2k+1)}{l}x}{2k+1}$. Для определения коэффи-

циентов Фурье решения исходной задачи получаем задачи Коши:

$$\begin{cases} T_n'(t) + \left(\dfrac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = 0, \\ T_n(0) = 0, \text{ если } n = 2k; \end{cases} \quad \begin{cases} T_n'(t) + \left(\dfrac{\pi n a}{l}\right)^2 T_n(t) = \dfrac{4f_0}{\pi n}, \\ T_n(0) = 0, \text{ если } n = 2k+1. \end{cases}$$

Ненулевые коэффициенты Фурье

$$T_{2k+1}(t) = \frac{4f_0 l^2}{\left(\pi(2k+1)\right)^3 a^2}\left(1 - \exp\left(-\left(\frac{\pi(2k+1)a}{l}\right)^2 t\right)\right), \; k = 0, 1, 2,$$

..., поэтому $u(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} T_{2k+1}(t) \sin\dfrac{\pi(2k+1)}{l} x.$

Заметьте, что

$$\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = \frac{f_0}{2a^2} x(l-x) = \frac{4f_0 l^2}{\pi^3 a^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\dfrac{\pi(2k+1)x}{l}}{(2k+1)^3}. \quad \blacksquare$$

Замечание 2.13. Очевидно, что основным в методе разделения переменных является нахождение системы собственных функций $\{X_n\}$ задачи Штурма—Лиувилля. В случае отрезка $0 \le x \le l$ для рассматриваемых краевых условий получаем некоторые системы тригонометрических функций. ■

2.3.6. Функция Грина начально-краевой задачи

Решение задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,\, t),\; 0 < x < l,\; t > 0,$$

$$u(0,\, t) = 0,\; u(l,\, t) = 0,\; t \ge 0, \tag{2.12}$$

$$u(x,\, 0) = \varphi(x),\; 0 \le x \le l,$$

было построено в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t\right\} + \tag{2.13}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) \int_0^t f_n(\tau) \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 (t-\tau)\right\} d\tau,$$

где $\varphi_n = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi$, $f_n(\tau) = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,\tau)\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi$.

Подставим эти выражения φ_n и $f_n(\tau)$ в (2.13) и поменяем в (2.13) порядок суммирований и интегрирований (эта операция, вообще говоря, требует обоснования).

Тогда

$$u(x,t) = \int\limits_0^l G(x,\xi;t)\varphi(\xi)d\xi + \int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,\xi;t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi\,d\tau, \quad (2.14)$$

где $G(x,\xi;t) = \dfrac{2}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}x\right)\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}\xi\right)\exp\left\{-\left(\dfrac{\pi n a}{l}\right)^2 t\right\}$. (2.15)

G называется ***функцией Грина*** задачи (2.12).

Формула (2.14) показывает, что эта функция содержит всю информацию о задаче (2.12), необходимую для построения ее решения.

Задача 2.4. Замените в задаче (2.12) краевые условия другими комбинациями нулевых краевых условий первого и/или второго рода. Найдите функции Грина полученных начально-краевых задач. ■

2.3.7. Построение формального решения начально-краевой задачи в прямоугольном параллелепипеде

Методом разделения переменных решим первую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности в *прямоугольном параллелепипеде*:

$$u_t = a^2\Delta u + f(M,\ t),\ u = u(M,\ t),\ M = M(x,\ y,\ z) \in D,\ t > 0,$$

$$D = \{0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2,\ 0 < z < l_3\} \text{ в } Oxyz;$$

$$u|_S = 0 \text{ при } t \geq 0;\ u(M,\ 0) = \varphi(M),\ M \in \bar{D}.$$

Решение $u(M,\ t)$ представим в виде суммы решений двух задач: в одной из них $f \equiv 0$, а φ не равна тождественно нулю, в другой f не равна тождественно нулю, а $\varphi \equiv 0$.

Разделим переменные в однородном уравнении: будем искать его нетривиальные частные решения вида $u(M,\ t) = V(M)\,T(t)$,

удовлетворяющие краевому условию $u\big|_S = 0$. Как и в задачах на отрезке, получаем

$$\frac{\Delta V(M)}{V(M)} = \frac{T_t'(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda,$$

откуда

$$\begin{cases} \Delta V(M) + \lambda V(M) = 0 \text{ в } D, \quad T_t'(t) + a^2 \lambda T(t) = 0. \\ V\big|_S = 0, \end{cases}$$

В построенной задаче Штурма—Лиувилля для функции V тоже разделим переменные:

$$V(M) = X(x)\,Y(y)\,Z(z),$$

$$\frac{X_{xx}''(x)}{X(x)} + \frac{Y_{yy}''(y)}{Y(y)} + \frac{Z_{zz}''(z)}{Z(z)} = -\lambda = \text{const}. \tag{2.16}$$

Поскольку дроби в (2.16) зависят лишь от одной независимой переменной, каждая из них постоянна. Из (2.16) и из краевого условия получаем

$$\begin{cases} X_{xx}''(x) + \alpha X(x) = 0, \\ X(0) = 0, X(l_1) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Y_{yy}''(y) + \beta Y(y) = 0, \\ Y(0) = 0, Y(l_2) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Z_{zz}''(x) + \gamma Z(z) = 0, \\ Z(0) = 0, Z(l_3) = 0, \end{cases}$$

причем $\lambda = \alpha + \beta + \gamma$. Решения этих задач Штурма—Лиувилля уже известны: $\alpha_m = \left(\dfrac{\pi m}{l_1}\right)^2$, $X_m(x) = \sin\left(\dfrac{\pi m}{l_1} x\right)$; $\beta_n = \left(\dfrac{\pi n}{l_2}\right)^2$, $Y_n(y) = \sin\left(\dfrac{\pi n}{l_2} y\right)$; $\gamma_k = \left(\dfrac{\pi k}{l_3}\right)^2$, $Z_k(z) = \sin\left(\dfrac{\pi k}{l_3} z\right)$.

Здесь индексы m, n, k *независимо* пробегают все натуральные числа. Итак,

$$\lambda_{m,n,k} = \left(\frac{\pi m}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{l_3}\right)^2,$$

$$V_{n,m,k}(M) = V_{m,n,k}(x,y,z) = \sin\left(\frac{\pi m}{l_1} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{l_2} y\right) \sin\left(\frac{\pi k}{l_3} z\right).$$

Замечание 2.14. Одному и тому же собственному значению λ могут отвечать несколько линейно независимых собственных функций, если это значение λ можно получить при различных наборах m, n, k. ■

Скалярное произведение двух заданных на D действительных функций $p(M)$ и $g(M)$ определим выражением $(p,g)=\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\int\limits_0^{l_3} p(\xi,\eta,\zeta)g(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta$. Тогда для любых различных наборов m, n, k построенные собственные функции ортогональны (проверьте!). Заметим, что $\left\|V_{m,n,k}\right\|^2=\dfrac{l_1l_2l_3}{8}$.

Получаем формальное решение начально-краевой задачи с $f\equiv 0$, а φ, не равной тождественно нулю:

$$u(M,t)=\sum_{m,n,k}\varphi_{m,n,k}V_{m,n,k}(M)\exp\left\{-\lambda_{m,n,k}a^2t\right\},$$

где $\varphi_{m,n,k}=\dfrac{8}{l_1l_2l_3}\int\limits_0^{l_1}\int\limits_0^{l_2}\int\limits_0^{l_3}\varphi(\xi,\eta,\zeta)V_{m,n,k}(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta$.

Чтобы решить начально-краевую задачу с f, не равной тождественно нулю, а $\varphi\equiv 0$, разложим $f(M,\,t)$ в ряд Фурье по системе функций $\left\{V_{m,n,k}(M)\right\}$ в $\overline{D}$:

$$f(M,t)=\sum_{m,n,k}f_{m,n,k}(t)V_{m,n,k}(M),$$

где $f_{m,n,k}(t)=\dfrac{\left(f,V_{m,n,k}\right)}{\left\|V_{m,n,k}\right\|^2}$.

Решение будем искать в виде $u(M,t)=\sum\limits_{m,n,k}T_{m,n,k}(t)V_{m,n,k}(M)$,

подстановка которого в неоднородное уравнение теплопроводности и в начальное условие приводит к задачам Коши

$$\begin{cases}T'_{m,n,k}(t)+a^2\lambda_{m,n,k}T_{m,n,k}(t)=f_{m,n,k}(t),t\geq 0,\\ T_{m,n,k}(0)=0.\end{cases}$$

Решая их, получаем коэффициенты

$$T_{m,n,k}(t)=\int\limits_0^t\exp\left\{-a^2\lambda_{m,n,k}(t-\tau)\right\}f_{m,n,k}(\tau)d\tau$$

формального разложения функции $u(M,\,t)$ в ряд Фурье по системе $\{V_{m,n,k}(M)\}$.

2.3.8. Построение формального решения начально-краевой задачи в круговом цилиндре

Рассмотрим применение метода разделения переменных к первой начально-краевой задаче для уравнения теплопроводности в *бесконечном круговом цилиндре*. Предположим, что ось цилиндра совпадает с Oz, а искомая температура не зависит от z. Тогда получаем начально-краевую задачу в круге $\overline{D} = \{0 \le r \le r_0, 0 \le \psi < 2\pi\}$ (r, ψ — полярные координаты на плоскости Oxy). Решение $u = u(M, t)$ будем записывать в полярных координатах: $M = M(r, \psi)$.

Разделяя пространственные переменные и время в однородном уравнении теплопроводности, придем к задаче Штурма—Лиувилля:

$$\begin{cases} \Delta V(M) + \lambda V(M) \equiv \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial V}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\cdot\dfrac{\partial^2 V}{\partial \psi^2} + \lambda V = 0 \text{ в } D, \\ V\big|_{r=r_0} = 0. \quad V(M) = V(r, \psi). \end{cases}$$

Заметим, что $|V(0, \psi)| < +\infty$, и что можно допускать любые действительные значения ψ, если считать $V(r, \psi) = V(r, \psi + 2\pi)$. В задаче Штурма—Лиувилля тоже разделим переменные:

$$V(M) = R(r)\Psi(\psi),$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right)\Psi(\psi) + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\Psi(\psi)}{d\psi^2}R(r) + \lambda R(r)\Psi(\psi) = 0,$$

$$\frac{r^2}{R}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \lambda R\right] = -\frac{\Psi''_{\psi\psi}}{\Psi} = \mu = \text{const}.$$

Задача на собственные значения $\Psi''_{\psi\psi} + \mu\Psi = 0$, $\Psi(\psi) = \Psi(\psi + 2\pi)$ имеет нетривиальные 2π-периодические решения только при $\mu = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$: $\Psi_n(\psi) = \cos(n\psi)$ и $\Psi_n(\psi) = \sin(n\psi)$.

Тогда для функции $R(r)$ получаем при каждом $n = 0, 1, 2, \ldots$ задачу

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \dfrac{n^2}{r^2}\right)R = 0, 0 \le r \le r_0; \\ |R(0)| < +\infty, R(r_0) = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Замена переменных $q = \sqrt{\lambda} r$, $w(q) = R\left(\dfrac{q}{\sqrt{\lambda}}\right)$ приводит уравнение в (2.17) к виду

$$q^2 \frac{d^2 w}{dq^2} + q \frac{dw}{dq} + \left(q^2 - n^2\right) w = 0. \tag{2.18}$$

Уравнение (2.18) называется ***уравнением Бесселя*** с целым индексом n; его решения называются ***цилиндрическими функциями***. Условию ограниченности в нуле удовлетворяет функция Бесселя первого рода $J_n(q)$. А из условия $R(r_0) = 0$ теперь можно найти собственные значения λ: они являются корнями уравнения $J_n\left(\sqrt{\lambda} r_0\right) = 0$. Уравнение $J_n(q) = 0$ имеет бесконечное число положительных корней $j_{n,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, поэтому $\lambda_{n,k} = \left(\dfrac{j_{n,k}}{r_0}\right)^2$.

Итак, задачам (2.17) удовлетворяют функции $R_{n,k}(r) = J_n\left(j_{n,k} \dfrac{r}{r_0}\right)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$

При $n = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ мы нашли собственные функции $V_{0,k}(r, \psi) = J_0\left(j_{0,k} \dfrac{r}{r_0}\right)$; они не зависят от ψ. При $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$ каждому набору индексов n, k отвечают две линейно независимые собственные функции:

$$V^{(1)}_{n,k}(r, \psi) = J_n\left(j_{n,k} \frac{r}{r_0}\right) \cos(n\psi) \text{ и } V^{(2)}_{n,k}(r, \psi) = J_n\left(j_{n,k} \frac{r}{r_0}\right) \sin(n\psi).$$

Решение первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в цилиндре (с $f \equiv 0$, φ, не равной тождественно нулю, и с нулевым краевым условием) надо искать в виде

$$u(r, \psi, t) = \sum_{n,k} J_n\left(j_{n,k} \frac{r}{r_0}\right)\left(A_{n,k} \cos(n\psi) + B_{n,k} \sin(n\psi)\right) \times$$
$$\times \exp\left\{-\left(j_{n,k} \frac{a}{r_0}\right)^2 t\right\}.$$

Коэффициенты $A_{n,k}$, $B_{n,k}$ можно найти из начального условия $u(r, \psi, 0) = \varphi(r, \psi)$ в $\bar{D}$. Для этого надо ввести в $\bar{D}$ скалярное произведение двух функций $p = p(r, \psi)$ и $g = g(r, \psi)$ по правилу

$(p, g) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} p(r, \psi) g(r, \psi) r dr d\psi$, доказать ортогональность (с весом r) системы собственных функций $\{V_{n,k}\}$ и найти $\|V_{n,k}\|^2$.

Замечание 2.15. Цилиндрические функции являются *специальными функциями* математической физики. К другому классу специальных функций приводит метод разделения переменных в шаре — к *сферическим функциям*, выражающимся через *полиномы Лежандра*. Многочисленные свойства различных специальных функций, систем ортогональных полиномов лежат в основе построения и изучения решений задач математической физики в практически важных областях $D \subset \mathbb{R}^2$, $D \subset \mathbb{R}^3$. ■

2.4. Доказательство существования классического решения первой начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности на отрезке

2.4.1. Достаточные условия почленного дифференцирования тригонометрических рядов Фурье

Метод разделения переменных дает *формальное решение* начально-краевой задачи. Требуется еще доказать, что построенное формальное решение является классическим решением (или решением в каком-либо ином смысле). Для этого необходимы дополнительные предположения о входящих в условие задачи функциях.

Докажем *существование классического решения* на примере первой начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности на отрезке. В этом случае $D = \{0 < x < l\}$, $Q_T = D \times \{0 < t \leq T\}$, $\overline{Q}_T = \overline{D} \times \{0 \leq t \leq T\}$, и имеем задачу:

$$u_t = a^2 u_{xx},\ (x,\ t) \in Q_T; \tag{2.19}$$

$$u(0,\ t) = 0,\ u(l,\ t) = 0,\ 0 \leq t \leq T; \tag{2.20}$$

$$u(x,\ 0) = \varphi(x),\ x \in \overline{D}. \tag{2.21}$$

Здесь $T > 0$ произвольно. В п. 2.2 были доказаны теоремы о единственности решения первой начально-краевой задачи и о его устойчивости, справедливые, в частности, для задачи (2.19)—(2.21). Доказательство существования классического решения завершает обоснование корректности этой задачи.

В задаче (2.19)—(2.21) классическим решением является функция $u(x,t) \in C\left(\overline{Q}_T\right) \cap C^{2,1}\left(Q_T\right)$. Необходимым условием его существования является $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Метод разделения переменных дает формальное решение этой задачи в виде ряда Фурье:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \tag{2.22}$$

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi. \tag{2.23}$$

Покажем, что (2.22) является классическим решением задачи (2.19)—(2.21), если функция φ удовлетворяет определенным условиям. Для этого сначала напомним некоторые факты из теории функциональных рядов и из теории рядов Фурье.

Лемма 2.1 (обобщенный принцип суперпозиции). Пусть $u_n(x,\, t)$, $n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$ — частные решения линейного однородного дифференциального уравнения $L[u_n] = 0$, и все входящие в L дифференциальные операции над функцией $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n u_n(x,t)$ можно проводить путем почленного дифференцирования этого ряда. Тогда функция $u(x,\, t)$ удовлетворяет уравнению $L[u] = 0$.

Доказательство.

$$L[u] = L\left[\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} C_n L[u_n] = 0. \ \blacksquare$$

Разложение функции $w(x)$, заданной и интегрируемой на отрезке $-l \le x \le l$, в ряд Фурье по общей тригонометрической системе $\left\{1, \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), n = 1, 2, \ldots,\right\}$ предполагает возможность периодического продолжения w на всю ось Ox с периодом $2l$.

Коэффициенты ряда Фурье $\frac{A_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} x\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)\right)$ функции w имеют вид

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} w(\xi)\,d\xi, \quad A_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} w(\xi)\cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi,$$

$$B_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} w(\xi)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi. \tag{2.24}$$

Теорема 2.7. Пусть функция $w(x)$ и все ее производные вплоть до порядка $m \geq 1$ непрерывны на отрезке $-l \leq x \leq l$ и удовлетворяют условиям $w(-l) = w(l)$, $w'(-l) = w'(l)$, ..., $w^{(m)}(-l) = w^{(m)}(l)$. Кроме того, пусть $w(x)$ имеет на $-l \leq x \leq l$ кусочно-непрерывную производную порядка $m+1$. Тогда ряд Фурье функции $w(x)$ по общей тригонометрической системе можно m раз дифференцировать почленно на $-l \leq x \leq l$.

Доказательство основано на том, что в условиях теоремы при целом $m \geq 0$ сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^m \left(|A_n| + |B_n|\right)$, где A_n и B_n — коэффициенты Фурье (2.24). Этот факт доказывается в курсе математического анализа [10, гл. 10, § 4]. ■

Если функция $w(x)$ задана и интегрируема на отрезке $0 \leq x \leq l$, причем $w(0) = w(l) = 0$, то ее можно разложить в ряд Фурье по системе $\left\{\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), n = 1, 2, \ldots\right\}$ на $0 \leq x \leq l$. Связь этого разложения с разложением по общей тригонометрической системе можно получить, если функцию $w(x)$ нечетным образом продолжить на $-l \leq x \leq l$.

Теорема 2.8. Пусть функция $w(x)$ на отрезке $0 \leq x \leq l$ имеет непрерывную m-ю производную и кусочно-непрерывную $(m+1)$-ю производную, причем $w^{(i)}(0) = w^{(i)}(l) = 0$ для всех *четных* i, $0 \leq i \leq m$. Тогда ряд Фурье функции $w(x)$ по системе $\left\{\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), n = 1, 2, \ldots\right\}$ на $0 \leq x \leq l$ можно m раз дифференцировать почленно.

2.4.2. Существование классического решения

Теорема 2.9. Пусть функция $\varphi \in C\left(\bar{D}\right)$ имеет в $\bar{D}$ кусочно-непрерывную производную и $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда существует классическое решение задачи (2.19)—(2.21), и оно дается рядом (2.22) с коэффициентами (2.23).

Доказательство. Очевидно, что при $x = 0$ и $x = l$ ряд (2.22) удовлетворяет краевым условиям (2.20).

При $t = 0$ ряд (2.22) является рядом Фурье функции $\varphi(x)$ по системе $\left\{\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right\}$ на отрезке $\bar{D}$. Надо доказать сходимость этого ряда к $\varphi(x)$ в каждой точке отрезка. Надо доказать, что сумма ряда (2.22) непрерывна в $\bar{Q}_T$, что в Q_T ряд (2.22) можно почленно дифференцировать по t и два раза по x, и что в $\bar{Q}_T$ его сумма удовлетворяет уравнению (2.19).

Ряд (2.22) при $t \geq 0$ мажорируется сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty}|C_n|$ (в теореме 2.7 $m = 0$ и все $A_n = 0$; $B_n = C_n$, если функцию φ продолжить нечетно). По признаку Вейерштрасса функциональный ряд (2.22) сходится *равномерно* в замкнутой области $\bar{Q}_T$, а его сумма является *непрерывной* функцией в этой замкнутой области. При $t = 0$ ряд (2.22) сходится к $\varphi(x)$ в каждой точке $x \in \bar{D}$, а заданная формулой (2.22) функция $u(x, t)$ удовлетворяет условию (2.21).

Докажем, что для любого $t_0 > 0$ при $t \geq t_0$ равномерно сходятся функциональные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2}, \tag{2.25}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}, \tag{2.26}$$

где $u_n(x,t) = C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x$.

Так как функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $\bar{D}$, то она ограничена: $|\varphi(x)| \leq K$, $x \in \bar{D}$, где $K = \text{const} > 0$. Тогда

$$|C_n| = \frac{2}{l}\left|\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi\right| \leq 2K.$$

При $t \geq t_0$

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| = \left|-C_n\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x\right| \leq 2K\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t_0},$$

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| = \left|-C_n\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 n^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x\right| \leq 2K\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 n^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t_0}.$$

Для функциональных рядов (2.25) и (2.26) мажорантные ряды имеют вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} Nn^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t_0}$, $b_n > 0$, где N — некоторая константа, равная $2K\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$ для ряда (2.25) и равная $2K\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2$ для ряда (2.26). Сходимость мажорантного ряда следует из признака Даламбера: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 (2n+1)t_0} = 0$. Ряды (2.25) и (2.26) сходятся равномерно и, следовательно, ряд (2.22) можно дифференцировать почленно в Q_T.

В силу обобщенного принципа суперпозиции функция $u(x, t)$, представимая рядом (2.22) с коэффициентами (2.23), является классическим решением начально-краевой задачи (2.19) — (2.21). ■

Замечание 2.16. В условиях доказанной теоремы классическое решение задачи (2.19) — (2.21) существует при $0 \le t < +\infty$ и *бесконечно дифференцируемо* по t и по x в D при $0 < t < +\infty$ (докажите!). ■

Замечание 2.17. Можно расширить класс решений, если допускать в (2.21) *кусочно-непрерывные* функции $\varphi(x)$ с кусочно-непрерывной производной. В этом случае построенное методом разделения переменных решение $u(x, t)$ будет при $t \to 0+$ непрерывно примыкать к функции $\varphi(x)$ в точках ее непрерывности, а в каждой точке x_0 разрыва первого рода функции φ, $0 < x_0 < l$, получим $\lim\limits_{t\to 0+} u(x_0, t) = \frac{1}{2}\big(\varphi(x_0 - 0) + \varphi(x_0 + 0)\big)$. ■

2.5. Задача Коши для уравнения теплопроводности, единственность ее решения

Задача Коши для уравнения теплопроводности представляет собой математическую модель распространения теплоты в пространстве при условии, что всюду известна температура в начальный момент времени $t = 0$. Уравнение теплопроводности — это дифференциальное уравнение второго порядка, и задача Коши для него может содержать два начальных условия, но по-

скольку для этого уравнения гиперповерхность $t = 0$ является *характеристикой*, следует задавать лишь одно начальное условие (см. п. 1.3):

$$D = \mathbb{R}^3,\ Q = \{(M,\ t) | M \in \mathbb{R}^3,\ 0 < t < +\infty\},$$

$$\bar{Q} = \{(M,t) | M \in \mathbb{R}^3,\ 0 \leq t < +\infty\}.$$

Задача Коши состоит в нахождении функции $u(M,\ t)$, удовлетворяющей условиям

$$u_t = a^2 \Delta u,\ M \in \mathbb{R}^3,\ 0 < t < +\infty, \tag{2.27}$$

$$u(M,\ 0) = \varphi(M),\ M \in \mathbb{R}^3. \tag{2.28}$$

Определение 2.4. ***Классическим решением задачи Коши*** для уравнения теплопроводности называется функция $u(M,t) \in C(\bar{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$, удовлетворяющая уравнению (2.27) в Q и начальному условию (2.28) при $t = 0$ всюду в $\mathbb{R}^3$.

Нетрудно проверить, что если $\varphi(M)$ — непрерывная и *ограниченная функция*, то функция

$$u(M,t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\varsigma)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi,\eta,\varsigma)\,d\xi\,d\eta\,d\varsigma,$$

$$M = M(x,\ y,\ z),$$

является классическим решением задачи Коши, *ограниченным* в $\bar{Q}$. В п. 2.6 данный факт будет доказан для случая одной пространственной переменной $x \in \mathbb{R}^1$; общий случай $M \in \mathbb{R}^3$ аналогичен. Возникает вопрос о единственности решения этой задачи.

Теорема 2.10. Задача (2.27), (2.28) может иметь только одно классическое решение, *ограниченное* в области $\bar{Q}$. ■

Замечание 2.18. В этой теореме существенным является требование ограниченности искомой функции во всей области $\bar{Q}$. Оно как раз и является условием, достаточным для единственности решения задачи (2.27), (2.28). ■

Замечание 2.19. Непосредственно воспользоваться принципом максимума для доказательства этой теоремы нельзя, так как $D = \mathbb{R}^3$ — неограниченная область. ■

Для простоты обозначений доказательство теоремы единственности проведем для случая, когда $\varphi(M)$ не зависит от y и z

(а, следовательно, и $u(M,\ t)$ не зависит от y и z), т.е. докажем теорему единственности решения задачи Коши на прямой:

$$Q = \{(x,\ t)|x \in \mathbb{R}^1,\ 0 < t < +\infty\},\ \overline{Q} = \left\{(x,t)\middle| x \in \mathbb{R}^1, 0 \le t < +\infty\right\},$$

$$u_t = a^2 u_{xx},\ (x,\ t) \in Q, \tag{2.29}$$

$$u(x,\ 0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^1, \tag{2.30}$$

и существует $K = \text{const}$ такая, что $|u(x,\ t)| \le K,\ (x,t) \in \overline{Q}$.

Доказательство теоремы 2.10. Предположим, что существуют два ограниченных решения $u_i(x,\ t),\ i = 1,\ 2$, которые удовлетворяют задаче (2.29), (2.30). Введем функцию $v(x,\ t) = u_1(x,\ t) - u_2(x,\ t)$. В силу линейности задачи (2.29) , (2.30) функция $v(x,\ t)$ будет удовлетворять однородной задаче Коши:

$$v_t = a^2 u_{xx},\ (x,\ t) \in Q, \tag{2.31}$$

$$v(x,\ 0) = 0,\ x \in \mathbb{R}^1. \tag{2.32}$$

Условие ограниченности для функций $u_1(x,\ t)$ и $u_2(x,\ t)$ дает условие ограниченности для функции $v(x,\ t)$:

$$|v(x,\ t)| = |u_1(x,\ t) - u_2(x,\ t)| \le |u_1(x,\ t)| + |u_2(x,\ t)| \le 2K,$$

где $|u_1(x,\ t)| \le K$, $|u_2(x,\ t)| \le K$.

Таким образом, функция $v(x,\ t)$ является решением задачи (2.31) ,(2.32) и ограничена в области $\overline{Q}$. Покажем, что $v(x,\ t) \equiv 0$, $(x,\ t) \in Q$. Выберем в полуплоскости Q линии $|x| = L$ и $t = T$ и рассмотрим ограниченную область $Q_{L,\,T}$:

$$Q_{L,T} = [-L, L] \times (0, T], \overline{Q}_{L,T} = [-L, L] \times [0, T].$$

Введем вспомогательную функцию $w(x,t) = \dfrac{4K}{L^2}\left(\dfrac{x^2}{2} + a^2 t\right)$.

Функция $w(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению $w_t = a^2 w_{xx}$. Положим $t = 0$, тогда $w(x,0) = \dfrac{2Kx^2}{L^2} \ge \left|v(x,0)\right| = 0$. Пусть $|x| = L$, тогда

$$w(\pm L, t) = 2K + \frac{4Ka^2 t}{L^2} \ge 2K \ge \left|v(\pm L, t)\right|.$$

Так как область $Q_{L,t}$ ограничена, внутри этой области функции $v(x,\ t)$ и $w(x,\ t)$ удовлетворяют однородному уравнению теплопроводности, а на границе выполняются условия $|v(x,\ 0)| \le w(x,\ 0)$ и $|v(\pm L,\ t)| \le w(\pm L,\ t)$, то к функциям $v(x,\ t)$ и $w(x,\ t)$ можно при-

менить следствие из принципа максимума: $|v(x,\ t)| \leq w(x,\ t)$, $(x,t)\in \overline{Q}_{L,T}$, или $-\dfrac{4K}{L^2}\left(\dfrac{x^2}{2}+a^2t\right)\leq v(x,t)\leq \dfrac{4K}{L^2}\left(\dfrac{x^2}{2}+a^2t\right)$. Зафиксируем точку $(x,t)\in \overline{Q}_{L,T}$ и перейдем к пределу при $L\to+\infty$, тогда получим $\lim\limits_{L\to+\infty} v(x,t)=0$. В силу независимости $v(x,\ t)$ от L и произвольности выбора точки $(x,\ t)$ всюду в области $\overline{Q}$ $v(x,\ t)\equiv \equiv 0$. Следовательно, $u_1(x,\ t)\equiv u_2(x,\ t)$ в Q, и решение задачи единственно. ■

Замечание 2.20. Требование ограниченности искомой функции является естественным физическим ограничением, если $u(M,\ t)$ имеет смысл температуры. ■

Замечание 2.21. Можно значительно ослабить ограничение на рост решения при $|x|\to\infty$ (при $M\to\infty$ в $\mathbb{R}^3$), отказавшись от ограниченности решения задачи Коши. Для этого введем класс функций, которые всюду в $\mathbb{R}^1$ и при всех $t\geq 0$ удовлетворяют неравенствам $|u(x,\ t)|<K\exp(Nx^2)$ с некоторыми положительными постоянными K и N (N и K определяются функцией $u(x,\ t)$). В этом классе функций справедлива теорема единственности. ■

2.6. Интеграл Пуассона. Существование и устойчивость классического решения задачи Коши. Функция Грина

2.6.1. Интеграл Пуассона; интуитивные соображения о его выводе. Функция Грина

Покажем, что *ограниченное решение* задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой ($D=\mathbb{R}^1$)

$$u_t = a^2u_{xx},\ (x,\ t)\in Q=\mathbb{R}^1\times\{0<t<+\infty\}, \tag{2.33}$$

$$u(x,\ 0)=\varphi(x),\ x\in\mathbb{R}^1, \tag{2.34}$$

дается формулой

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)d\xi, \tag{2.35}$$

которая называется ***интегралом Пуассона***.

Для этого проведем некоторые интуитивные рассуждения, цель которых — установить аналогию с методом разделения переменных в задачах на конечном отрезке изменения x. Строгое доказательство формулы (2.35) дано в п. 2.6.2.

Частные решения уравнения (2.33) будем искать в виде $u(x, t) = X(x)\,T(t)$, $|u(x, t)| \le K = \text{const}$. Разделив переменные в (2.33), получим

$$\frac{X''_{xx}(x)}{X(x)} = \frac{T'_t(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda = \text{const},$$

откуда

$$X''_{xx}(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{2.36}$$

$$T'_t(t) + \lambda a^2 T(t) = 0. \tag{2.37}$$

Поскольку функция $\varphi(x)$ и решение $u(x, t)$ задачи (2.33), (2.34), вообще говоря, не являются периодическими с конечным периодом по переменной x, решение задачи Коши получим не в виде ряда Фурье, как это было в случае задач на отрезке, а в виде *интеграла Фурье*, если он существует. Интеграл Фурье удобно записывать в комплексной форме. Выясним, при каких *комплексных* λ ненулевые решения уравнений (2.36) и (2.37) будут ограничены.

Общее решение уравнения (2.37) имеет вид $T(t) = Ae^{-a^2\lambda t}$, где постоянная A зависит от λ. Для ограниченности этого решения при $t \ge 0$ необходимо потребовать $\mathrm{Re}\lambda \ge 0$.

Общее решение уравнения (2.36) имеет вид $X(x) = B_1 e^{-i\sqrt{\lambda}x} + B_2 e^{i\sqrt{\lambda}x}$, где постоянные B_1, B_2 зависят от λ, i — мнимая единица. Покажем, что для ограниченности этого решения необходимо потребовать $\mathrm{Im}\lambda = 0$. Если $\mathrm{Im}\lambda \ne 0$, то $\lambda = re^{i\psi}$, где $0 < \psi < \pi$ или $\pi < \psi < 2\pi$. Тогда $\sqrt{\lambda} = \sqrt{r}e^{i(\psi/2 + \pi m)}$, $m = 0, 1$, и

$$\exp\left\{\pm i\sqrt{\lambda}x\right\} = \exp\left\{\pm i\sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\psi}{2} + \pi m\right) + i\sin\left(\frac{\psi}{2} + \pi m\right)\right)x\right\}.$$

Поскольку $\frac{\psi}{2} \ne 0$ и $\frac{\psi}{2} \ne \pi$, то $\sin\left(\frac{\psi}{2} + \pi m\right) \ne 0$ при $m = 0, 1$, и выражения $\left|\exp\left\{\pm i\sqrt{\lambda}x\right\}\right| = \exp\left\{\mp\sqrt{r}\sin\left(\frac{\psi}{2} + \pi m\right)x\right\}$ не будут ограниченными либо при $x > 0$, либо при $x < 0$.

Итак, $\lambda = k^2 \geq 0$, $k \in \mathbb{R}^1$. Таким образом, имеем решения $X_k(x) = B(k)e^{ikx}$, $x \in \mathbb{R}^1$, и $T_k(t) = A(k)e^{-a^2k^2t}$, $t \geq 0$. Искомые ограниченные частные решения уравнения (2.33) получаем в виде

$$u(x,t,k) = C(k)e^{ikx-a^2k^2t}, C(k) = A(k)B(k), k \in \mathbb{R}^1.$$

Функция

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k)e^{-a^2k^2t+ikx}dk \tag{2.38}$$

будет искомым общим решением уравнения (2.33), если этот несобственный интеграл, зависящий от параметров x и t, сходится в области Q к непрерывной функции $u(x, t)$, ограничен в Q, и существуют частные производные u_t и u_{xx}, которые можно вычислять под знаком интеграла. Из условия (2.34) находим $C(k)$:

$$u(x,0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k)e^{ikx}dk. \tag{2.39}$$

Соотношение (2.39) является разложением функции $\varphi(x)$ в интеграл Фурье; $C(k)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(x)$:

$$C(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)e^{-ik\xi}d\xi. \tag{2.40}$$

Заметим, что формулы (2.39) и (2.40) имеют смысл только при специальных предположениях относительно функции φ [3, гл. 10, § 6]; интеграл в (2.39) понимается в смысле главного значения, а в формуле (2.40) интеграл несобственный. Подставим формулу (2.40) в (2.38) и поменяем порядок интегрирования:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2k^2t+ik(x-\xi)}dk\right\}\varphi(\xi)d\xi \tag{2.41}$$

(законность этой операции требует обоснования).

Вычислим интеграл $J(\alpha,\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2k^2+ik\alpha}dk$, который является внутренним интегралом в формуле (2.41) при $\beta^2 = a^2t$, $\alpha = x - \xi$. Для этого вычислим его производную по α:

$$\frac{dJ}{d\alpha}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}ik\mathrm{e}^{-\beta^2k^2+ik\alpha}dk=-\frac{i}{2\beta^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{ik\alpha}d\left(\mathrm{e}^{-\beta^2k^2}\right)=$$

$$=-\frac{i}{2\beta^2}\mathrm{e}^{ik\alpha-\beta^2k^2}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}+\frac{i}{2\beta^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}i\alpha\mathrm{e}^{-\beta^2k^2+ik\alpha}dk=-\frac{\alpha}{2\beta^2}J\left(\alpha,\beta\right).$$

Следовательно, для $J(\alpha,\beta)$ получено дифференциальное уравнение: $\dfrac{dJ\left(\alpha,\beta\right)}{d\alpha}+\dfrac{\alpha}{2\beta^2}J\left(\alpha,\beta\right)=0$. Его решение имеет вид

$$J\left(\alpha,\beta\right)=H\left(\beta\right)\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}},$$

$$H\left(\beta\right)=J\left(0,\beta\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta^2k^2}dk=\frac{1}{\beta}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-z^2}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{\beta}.$$

Отсюда $J\left(\alpha,\beta\right)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{\beta}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{4\beta^2}}$. Подставляя $J\left(x-\xi,a\sqrt{t}\right)$ в формулу (2.41), получим *формальное решение* задачи Копи в виде интеграла Пуассона (2.35).

Несколько иной способ рассуждений состоит в следующем. Предположим, что существуют преобразование Фурье $C(k)$ функции $\varphi(x)$ и при каждом $t>0$ преобразование Фурье $\hat{u}(k,t)$ функции $u(x,\,t)$ (по переменной x). Применив преобразование Фурье к равенствам (2.33) и (2.34), получим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial\hat{u}(k,t)}{\partial t}+a^2k^2\hat{u}(k,t)=0,\;\;\hat{u}(k,0)=C(k).$$

Очевидно, что $\hat{u}(k,t)=C(k)\mathrm{e}^{-a^2k^2t}$. Теперь, обращая преобразование Фурье, приходим к формуле (2.41). Для обоснованности такого способа рассуждений требуется предполагать, что при всех $t>0$ функция $u(x,\,t)$ удовлетворяет условиям $u(\pm\infty,\,t)=0$ и $u_x(\pm\infty,\,t)=0$.

Введем обозначение $G\left(x,\xi;t\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi a^2t}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$. Эта функция называется ***функцией Грина*** уравнения теплопроводности (2.33) на прямой.

2.6.2. Существование классического решения задачи Коши

Докажем, что формальное решение (2.35) является классическим решением задачи Коши в $\bar{Q} = \mathbb{R}^1 \times \{0 \le t < +\infty\}$, если функция φ удовлетворяет естественным требованиям.

Лемма 2.2 (обобщенный принцип суперпозиции). Пусть при всех k $(-\infty < k < +\infty)$ функции $u(x, t, k)$ являются частными решениями линейного однородного дифференциального уравнения $L[u(x, t, k)] = 0$ с независимыми переменными x и t. Пусть все входящие в L дифференциальные операции по x и t над функцией $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,k)\,dk$ можно проводить путем дифференцирования под знаком этого интеграла. Тогда функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению $L[u] = 0$.

Доказательство.

$$L[u] = L\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x,t,k)\,dk\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} L\left[u(x,t,k)\right]dk = 0. \quad \blacksquare$$

Теорема 2.11. Пусть $\varphi(x)$ — непрерывная и ограниченная функция на числовой прямой: $|\varphi(x)| \le N$ при $x \in \mathbb{R}^1$. Тогда формула $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi;t)\varphi(\xi)\,d\xi$ при $(x,t) \in \bar{Q}$ определяет классическое решение задачи (2.33), (2.34).

Доказательство. Докажем существование и ограниченность функции $u(x,\ t)$. Сделаем замену переменной $z = \dfrac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$, $\xi = 2a\sqrt{t}z + x$ и оценим интеграл (2.35):

$$\left|u(x,t)\right| \le \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|\varphi\left(x + 2za\sqrt{t}\right)\right| \mathrm{e}^{-z^2} dz \le \frac{N}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-z^2} dz = N. \quad (2.42)$$

Из признака Вейерштрасса вытекает, что интеграл (2.35) сходится равномерно в окрестности любой внутренней точки $(x,\ t)$ области Q. Следовательно, функция $u(x,\ t)$ существует и ограничена.

Для применимости обобщенного принципа суперпозиции достаточно доказать, что интеграл, полученный формальным

дифференцированием функции $u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi;t)\varphi(\xi)d\xi$, сходится равномерно.

Докажем равномерную сходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_t(x,\xi;t)\varphi(\xi)d\xi$ в окрестности любой внутренней точки $(x,t)\in Q$. Так как $\dfrac{\partial G}{\partial t}=-\dfrac{1}{2t}G(x,\xi;t)+\dfrac{(x-\xi)^2}{4a^2t^2}G(x,\xi;t)$, то нужно доказать равномерную сходимость интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi;t)\left\{-\frac{1}{2}+\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right\}\frac{\varphi(\xi)}{t}d\xi \tag{2.43}$$

в окрестности внутренней точки $(x,t)\in \bar{Q}_{\epsilon,T}=\mathbb{R}^1\times[\epsilon,T]$ для любых $\epsilon>0$ и $T>\epsilon$.

Сделаем замену переменной $z=\dfrac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$, тогда получим интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G\left(x,x+2a\sqrt{t}z;t\right)\left\{-\frac{1}{2}+z^2\right\}\frac{2a\sqrt{t}\varphi\left(2a\sqrt{t}z+x\right)}{t}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}+z^2\right)\frac{\varphi(2a\sqrt{t}z+x)}{t}\mathrm{e}^{-z^2}dz.$$

Проведем оценку этого интеграла в области $\bar{Q}_{\epsilon,T}$:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}+z^2\right)\frac{\varphi\left(2a\sqrt{t}z+x\right)}{t}\mathrm{e}^{-z^2}dz\right|\leq$$

$$\leq\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|z^2-\frac{1}{2}\right|\frac{N}{t}\mathrm{e}^{-z^2}dz<\frac{N}{\epsilon\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(z^2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-z^2}dz.$$

Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(z^2+\dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-z^2}dz$ сходится, следовательно, интеграл (2.43) равномерно сходится в окрестности внутренней точки области $\bar{Q}_{\epsilon,T}$.

Аналогично доказывается равномерная сходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} G_{xx}(x,\xi;t)\varphi(\xi)d\xi$. Действительно,

$$G_{xx}(x,\xi;t)=\frac{1}{a^2}\Big(-\frac{1}{2t}G(x,\xi;t)+\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t^2}G(x,\xi;t)\Big).$$

В силу обобщенного принципа суперпозиции функция $u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi;t)\varphi(\xi)d\xi$ удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности в области $Q_{\varepsilon,T}$, а в силу произвольности выбора ε и T однородное уравнение теплопроводности будет выполняться в области Q.

Осталось доказать, что функция $u(x,\,t)$ непрерывно примыкает к функции $\varphi(x)$. Выполним замену $z=\dfrac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$, получим $u(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-z^2}\varphi\big(x+2az\sqrt{t}\,\big)dz$. Так как подынтегральная функция мажорируется функцией $N\mathrm{e}^{-z^2}$, интеграл от которой сходится, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-z^2}\varphi\big(x+2az\sqrt{t}\,\big)dz$ сходится равномерно по параметру t при $0\le t\le T$. В силу непрерывности подынтегральной функции можно осуществить предельный переход под знаком интеграла: $\lim\limits_{t\to 0+}u(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\varphi(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-z^2}dz=\varphi(x)$. Следовательно, функция $u(x,\,t)$ непрерывна в области $\overline{Q}$ и непрерывно примыкает к функции $\varphi(x)$. ■

Замечание 2.22. Из доказательства теоремы видно, что $G_t(x,\,\xi;\,t)=a^2G_{xx}(x,\,\xi;\,t)$. ■

Замечание 2.23. Можно расширить класс решений задачи (2.33), (2.34), если допускать в условии ограниченные *кусочно-непрерывные функции* $\varphi(x)$. В этом случае построенное по формуле (2.35) решение $u(x,\,t)$ будет при $t\to 0+$ непрерывно примыкать к $\varphi(x)$ в точках ее непрерывности, а в каждой точке x_0 разрыва первого рода функции φ получим

$$\lim_{t\to 0+}u(x_0,t)=\frac{1}{2}\big(\varphi(x_0-0)+\varphi(x_0+0)\big).\ \blacksquare$$

Замечание 2.24. Если две функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ удовлетворяют условиям предыдущей теоремы, и при всех x, $-\infty < x < +\infty$, выполнено неравенство $|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \varepsilon$, то отвечающие им решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ задачи (2.33), (2.34) удовлетворяют неравенству $|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon$ при всех $(x,t) \in \bar{Q}$. (Доказательство как в (2.42).) Иными словами, решение задачи (2.33), (2.34) *устойчиво* по отношению к возмущениям в начальном условии. ■

Для некоторых функций φ решение (2.35) задачи (2.33), (2.34) удается выразить через *функцию ошибок* $erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2} d\alpha$.

Полезно помнить, что $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{2}} d\alpha = \sqrt{2\pi}$, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $erf(-z) = -erf(z)$.

Задача 2.5. Найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u_t = a^2 u_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} u_1 = \text{const}, x < 0, \\ u_2 = \text{const}, x > 0. \end{cases}$$

Указание.

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi;t)\varphi(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{u_1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} d\xi + \frac{u_2}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right\} d\xi.$$

Выполните замену переменной интегрирования: $\alpha = \frac{(x-\xi)}{2a\sqrt{t}}$. Вы должны получить

$$u(x,t) = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha =$$

$$= \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{2} erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

Заметьте, что $\lim_{t \to 0+} u(0,t) = \frac{u_1 + u_2}{2}$, и что в соответствии с физическим содержанием задачи $\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = \frac{u_1 + u_2}{2}$. ■

2.6.3. Решение задачи Коши для неоднородного уравнения

Пусть $f(x,\ t)$ — *непрерывная* и *ограниченная* в $\bar{Q} = \mathbb{R}^1 \times \{0 \le t < +\infty\}$ *функция*. Фиксируем $\tau > 0$, и вместо прямой $t = 0$ в качестве носителя начальных данных в задаче Коши выберем прямую $t = \tau$.

Функция $v(x,t,\tau) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t-\tau)}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\xi,\tau)\,d\xi$ при $t > \tau$ удовлетворяет уравнению $v_t = a^2 v_{xx}$, а при $t = \tau$ — начальному условию $v(x,\ t = \tau,\ \tau) = f(x,\ t)$, $-\infty < x < +\infty$. Рассмотрим семейство таких задач со всевозможными $\tau \ge 0$.

Теорема 2.12. Функция $u(x,t) = \displaystyle\int_0^t v(x,t,\tau)\,d\tau$ является решением задачи Коши для *неоднородного уравнения* теплопроводности:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,\ t) \text{ в } Q, \tag{2.44}$$

$$u(x,\ 0) = 0,\ -\infty < x < +\infty. \tag{2.45}$$

Доказательство. Выполнение начального условия при $t = 0$ очевидно. Выполнение уравнения в Q следует из того, что

$$u_t(x,t) = \int_0^t v_t(x,t,\tau)\,d\tau + v(x,t,t) = a^2 \int_0^t v_{xx}(x,t,\tau)\,d\tau + f(x,t),$$

$$u_{xx}(x,t) = \int_0^t v_{xx}(x,t,\tau)\,d\tau. \ \blacksquare$$

Замечание 2.25. Решение задачи (2.44), (2.45) можно записать в виде

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi;t-\tau) f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Такой интеграл называется ***сверткой*** функций G и f. $\blacksquare$

2.6.4. Свойства функции Грина. Ее физический смысл

Очевидны следующие свойства функции Грина уравнения теплопроводности на прямой:

1) $G(x, \xi; t)$ определена при $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < \xi < +\infty$, $0 < t < +\infty$ и удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности по переменным x и t;

2) $G(x, \xi; t) > 0$;

3) $G(x, \xi; t) = G(\xi, x; t)$;

4) $\lim\limits_{t \to 0+} G\big|_{x \neq \xi} = 0$, $\lim\limits_{t \to 0+} G\big|_{x = \xi} = +\infty$ (наиболее существенное свойство).

Задача 2.6. Постройте графики функции G (при фиксированных ξ и t) в разные моменты времени. Что происходит при $t \to +\infty$? При $t \to 0+$? ■

Функция Грина имеет определенный физический смысл. Будем считать, что $u(x, t)$ — температура бесконечного однородного стержня, имеющего постоянные удельную теплоемкость ($c = \text{const}$) и объемную плотность массы ($\rho = \text{const}$). Пусть $u(x, t) = 0$ для всех x при $t < 0$, а в момент времени $t = 0$ в точке с координатой ξ мгновенно выделилось «количество теплоты» $c\rho$ — сработал мгновенный точечный источник теплоты. Если боковая поверхность стержня теплоизолирована, то со временем переданная стержню теплота не изменится, но расплывется по всей прямой $-\infty < x < +\infty$. Тогда температура в точке x в момент времени $t > 0$, обусловленная теплопроводностью в стержне, будет равна $G(x, \xi; t)$. Если указанный мгновенный точечный источник сработал в момент времени $\tau \geq 0$, то температура в точке x в момент времени $t > \tau$ будет равна $G(x, \xi; t - \tau)$. В формуле $u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi;t)\varphi(\xi)d\xi$ суммируем вклады в температуру $u(x, t)$ от мгновенных точечных источников теплоты разных мощностей, распределенных вдоль всего стержня и сработавших в момент времени $t = 0$. В формуле $u(x,t) = \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi;t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi\,d\tau$ суммируем вклады в температуру $u(x, t)$ от мгновенных точечных источников теплоты разных мощностей, распределенных вдоль всего стержня, но сработавших каждый в свой момент времени τ $(0 \leq \tau < t)$.

Замечание 2.26. Температуру, обусловленную срабатыванием мгновенного точечного источника теплоты, в точке и в момент его срабатывания следует считать бесконечной: $\lim\limits_{t \to 0+} G\big|_{x = \xi} = +\infty$. В любой сколь угодно далекой от ξ точке x в

любой «следующий» момент времени $t > 0$ температура, обусловленная действием этого источника, будет отлична от нуля: $G(x, \xi; t) > 0$. ■

2.6.5. Сведение начально-краевых задач на луче к задачам Коши на прямой

К задачам (2.33), (2.34) и (2.44), (2.45) можно свести начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности на луче: $D = \{0 < x < +\infty\}$, $Q = D \times \{0 < t < +\infty\}$. К таким начально-краевым задачам приходим, если при описании температуры стержня нас интересует его участок вблизи одного конца, но удаленный от другого. Рассмотрим задачи для однородного уравнения теплопроводности с нулевым краевым условием при $x = 0$ и найдем способ построения их функций Грина. Эти задачи имеют следующий вид:

найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$ при $(x, t) \in Q$, начальному условию $u(x, 0) = \varphi(x)$ при $x \in \bar{D}$ и одному из краевых условий $u(0, t) = 0$; или $u_x(0, t) = 0$; или $u_x(0, t) - hu(0, t) = 0$, $h > 0$, $t \geq 0$.

Предположим, что на всей прямой $-\infty < x < +\infty$ определена непрерывная и ограниченная функция $\Phi(x)$. Введем функцию

$$U(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \Phi(\xi) d\xi, \quad -\infty < x < +\infty, \ t > 0.$$

Утверждение 2.1. Если $\Phi(x)$ — нечетная функция на $-\infty < x < +\infty$, то $U(0, t) = 0$ при всех $t > 0$.

Утверждение 2.2. Если $\Phi(x)$ — четная функция на $-\infty < x < +\infty$, то $U_x(0, t) = 0$ при всех $t > 0$.

Утверждение 2.3. Если $\Phi(x)$ имеет ограниченную производную, а функция $\Phi'_x(x) - h\Phi(x)$ — нечетная на $-\infty < x < +\infty$, то $U_x(0, t) - hU(0, t) = 0$ при всех $t > 0$.

Доказательства сформулированных утверждений элементарны. Предлагаем читателю провести их самостоятельно. Из утверждений 2.1—2.3 ясно, что задаче для уравнения $u_t = a^2 u_{xx}$ в Q с краевым условием $u(0, t) = 0$ надо поставить в соответствие задачу Коши *на всей прямой* для уравнения $U_t = a^2 U_{xx}$ с начальным условием $U(x,0) = \Phi(x) = \begin{cases} -\varphi(-x), x < 0, \\ \varphi(x), x \geq 0. \end{cases}$ Задаче с краевым

условием $u_x(0,\, t) = 0$ надо поставить в соответствие задачу Коши с начальным условием $U(x,0) = \Phi(x) = \begin{cases} \varphi(-x), x < 0, \\ \varphi(x), x \geq 0. \end{cases}$ Задаче с краевым условием $u_x(0,\, t) - hu(0,\, t) = 0$ надо поставить в соответствие задачу Коши с начальным условием $U(x,\, 0) = \Phi(x)$, где $\Phi'_x(x) - h\Phi(x) = -\varphi'(-x) + h\varphi(-x)$ при $x < 0$, $\Phi(x) = \varphi(x)$ при $x \geq 0$ (предполагаем наличие ограниченной производной у функции φ). Решение задачи Коши относительно $U(x,\, t)$ можно записать в виде интеграла Пуассона (2.35), тогда при $x > 0$ получим

$$u(x,t) = U(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{0} G(x,\xi;t)\Phi(\xi)d\xi + \int\limits_{0}^{+\infty} G(x,\xi;t)\varphi(\xi)d\xi.$$

В первом слагаемом от интегрирования по ξ перейдем к интегрированию по $-\xi$, тогда решение исходной задачи с краевым условием j-го рода, $j = 1,\, 2,\, 3$, будет записано в виде

$$u_j(x,t) = \int\limits_{0}^{+\infty} G_j(x,\xi;t)\varphi(\xi)d\xi.$$

Задача 2.7. Найдите $G_j(x,\, \xi;\, t)$, $j = 1,\, 2,\, 3$. Запишите решения задач $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,\, t)$, $(x,\, t) \in Q$; $u(x,\, 0) = 0$, $x \in \overline{D}$, с нулевыми краевыми условиями j-го рода при $x = 0$.

Ответ. При $0 \leq x < +\infty$, $0 \leq \xi < +\infty$, $0 < t < +\infty$

$$G_1(x,\xi;t) = G(x,\xi;t) - G(x,-\xi;t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} - \mathrm{e}^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right),$$

$$G_2(x,\xi;t) = G(x,\xi;t) + G(x,-\xi;t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + \mathrm{e}^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right),$$

$$G_3(x,\xi;t) = G(x,\xi;t) + G(x,-\xi;t) - 2h\int\limits_{0}^{+\infty} G(x,-\xi-\zeta;t)\mathrm{e}^{-h\zeta}d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} + \mathrm{e}^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}} - 2h\int\limits_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x+\xi+\zeta)^2}{4a^2t}}\mathrm{e}^{-h\zeta}d\zeta\right),$$

где $G(x,\, \xi;\, t)$ — функция Грина уравнения теплопроводности на прямой. ■

2.7. Понятие обобщенной функции. δ-Функция и функция Грина. Понятие обобщенного решения

2.7.1. Об аппроксимационном подходе к определению обобщенных решений

Условия начально-краевой задачи или задачи Коши для уравнения теплопроводности могут не допускать ее классического решения. Например, может не выполняться согласование начального и краевого условий.

Такую задачу (назовем ее условно P) разумно рассматривать как предельную для последовательности задач P_k, в которых согласование этих условий имеется, а выход краевого условия на заданное в P краевое условие происходит за короткое время Δt_k. При $\Delta t_k \to 0$ получаем задачу P, а предел $u(M, t)$ классических решений $u_k(M, t)$ принимаем за решение задачи P.

Аналогично можно рассуждать и в случае, когда входящие в начальное и/или в краевое условие функции не обладают свойствами, которые требуются для существования классического решения.

С подобной же аппроксимационной точки зрения надо рассматривать и идеализированное понятие «мгновенного точечного источника», например, в задачах для неоднородного уравнения с имеющей особенности неоднородностью.

Чтобы поставить такие задачи, приходится отказываться от желаемой гладкости решения или от его непрерывности в $\overline{Q}$, рассматривать выполнимость уравнения в специально определенном смысле и т. д. Тогда возникает вопрос о том, какие функции следует называть решениями.

Чтобы строго определить *обобщенное решение* $u(M, t)$ и ввести необходимые для этого математические конструкции, надо указать, в каком смысле данные задач P_k приближают данные задачи P, и в каком смысле решения $u_k(M, t)$ сходятся к $u(M, t)$.

Это можно сделать разными способами и требует привлечения понятий функционального анализа и теории функций. Здесь же мы ограничимся описанием на интуитивном уровне.

2.7.2. Понятие обобщенной функции. Использование δ-функции в некоторых задачах для уравнения теплопроводности

Функция Грина (функция влияния мгновенного точечного источника) $G(x, \xi; t - \tau)$ — это изменение температуры в точке x за время $t - \tau$, которое обусловлено мгновенным выделением «теплоты» $c\rho$ в точке ξ в момент времени τ. Зададимся следующими вопросами. Что подразумевается под мгновенным выделением конечного количества теплоты? Что значит выделение теплоты в единственной точке? Можно ли указанный мгновенный точечный источник теплоты учесть в виде неоднородности уравнения теплопроводности? Эти вопросы приводят к важному понятию δ-функции — математическому объекту, который не является функцией в обычном смысле.

Пусть на прямой $-\infty < x < +\infty$ имеется достаточно большой запас «пробных функций» $\psi(x)$. Можно считать, что все они бесконечно дифференцируемы и обращаются в нуль на бесконечности. Функционал f — это отображение, которое каждой функции ψ ставит в соответствие число; функция ψ — аргумент функционала. Действие функционала с именем f на функцию ψ можно записать в виде (f, ψ). Нас будут интересовать *линейные* по ψ функционалы (и в определенном смысле *непрерывные* по ψ). Некоторые из них можно задать с помощью обычных функций $f(x)$ и присвоить им имена этих функций: $(f, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi(x)dx$. Другие функционалы нельзя задать таким способом, например, $(\delta, \psi) = \psi(0)$. Последнее равенство определяет функционал с именем δ, который и называют «δ-функцией» (сосредоточенной в точке $x = 0$).

Если мы хотим иметь возможность сдвигать значение аргумента x пробной функции ψ в этом равенстве, то введем функционал с именем $\delta(x - x_0)$ по правилу $(\delta(x - x_0), \psi) = \psi(x_0)$.

Таким образом, сосредоточенная в нуле δ-функция — это $\delta(x)$.

Здесь x нельзя рассматривать как аргумент функции в обычном смысле: $\delta(x)$ — единый символ, имя функционала; аргумент этого функционала —пробная функция ψ. Указанные линейные и непрерывные по ψ функционалы называют ***обобщенными функциями***.

Иногда действие функционала $\delta(x-x_0)$ на пробную функцию ψ записывают в виде $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0)\psi(x)dx$, понимая этот интеграл либо как единый символ, эквивалентный $(\delta(x-x_0),\psi)=\psi(x_0)$, либо как результат приближения δ-функции обычными функциями. Говорят, что последовательность обобщенных функций $\{f_n\}$ сходится к обобщенной функции f, если для любой пробной функции ψ числовая последовательность (f_n,ψ) сходится к (f,ψ) при $n\to\infty$. Тем самым обобщенную функцию f можно приближать, например, обычными функциями $f_n(x)$ в том смысле, что для любой пробной функции ψ справедливо предельное соотношение $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\psi(x)dx\to(f,\psi)$ при $n\to\infty$. Это вовсе не означает, что $\{f_n(x)\}$ сходится к f при каждом фиксированном x. Вспомните предел при $t_n\to 0+$ функций $G(x,\xi;t_n)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t_n}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t_n}}$:

$\lim\limits_{t\to 0+}G(x,\xi;t)=\begin{cases}0, x\neq\xi,\\ +\infty, x=\xi.\end{cases}$ Последний предел не является разумным образом определенной функцией. На самом деле речь идет о сходимости последовательности обычных функций $G(x,\xi;t_n)$ одной переменной x (ξ — параметр) к $\delta(x-\xi)$ в *слабом* смысле, т. е. в смысле обобщенных функций.

Бессмысленно говорить о «значении» δ-функции в какой-либо точке x, но ее можно приблизить обычными функциями с любой точностью в указанном выше смысле. Понятие обобщенной функции дает возможность выразить в математически корректной форме такие идеализированные понятия, как интенсивность мгновенного источника теплоты, объемную плотность сосредоточенной в одной точке массы и т. д. С другой стороны, это понятие отражает тот факт, что реально нельзя измерить значение физической величины в точке, а можно измерять лишь ее средние значения в достаточно малых окрестностях данной точки.

Выберем дифференцируемую обычную функцию одной переменной $f(x)$ и зададим функционал f': $(f',\psi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\psi(x)dx$. Вычислим интеграл по частям и вспомним, что мы выбирали пробные функции $\psi(x)$, для которых $\psi(-\infty)=\psi(+\infty)=0$. Тог-

да $(f',\psi)=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\psi'(x)dx=-(f,\psi')$. Производная любой обобщенной функции определяется точно так же: если f — обобщенная функция, то f' — имя функционала, действующего по правилу $(f',\psi)=-(f,\psi')$ для каждой пробной функции ψ. Тем самым все обобщенные функции имеют обобщенные производные любого порядка. Например, разрывная обычная функция $\theta(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ 1, x\geq 0\end{cases}$ имеет обобщенную производную $\theta'=\delta(x)$, поскольку

$$(\theta',\psi)=-(\theta,\psi')=-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\theta(x)\psi'(x)dx=$$

$$=-\int\limits_{0}^{+\infty}\psi'(x)dx=\psi(0)=(\delta(x),\psi).$$

Если у всех пробных функций ψ существует преобразование Фурье $\widehat{\psi}$ (можно выбрать такой запас функций ψ), то преобразование Фурье обобщенной функции f — это функционал $\hat{f}$, действующий по правилу $(\hat{f},\psi)=(f,\widehat{\psi})$.

Можно выбрать запас пробных функций ψ, определенных на интервале $-l<x<l$. Тогда обобщенные функции можно раскладывать в ряды Фурье. Например, $\delta(x)=\frac{1}{2l}+\frac{1}{l}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n}{l}x$. Последний ряд, который в обычном смысле расходится, надо понимать как имя функционала, действие которого на разложимую в ряд Фурье по системе $\{1,\cos\frac{\pi}{l}x,\sin\frac{\pi}{l}x,\ldots,\cos\frac{\pi n}{l}x,\sin\frac{\pi n}{l}x,\ldots\}$ на $-l<x<l$ функцию $\psi(x)$ аналогично действию функционала $\delta(x)$.

В самом деле, с одной стороны, $\psi(x_0)=\int\limits_{-l}^{l}\delta(x-x_0)\psi(x)dx$, а с другой стороны,

$$\int\limits_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2l}+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n}{l}(x-x_0)\right)\psi(x)dx=$$

$$= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\psi(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\cos\frac{\pi n}{l}x\psi(x)\,dx\right)\cos\frac{\pi n}{l}x_0 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\sin\frac{\pi n}{l}x\psi(x)\,dx\right)\sin\frac{\pi n}{l}x_0\right) = \psi(x_0),$$

поскольку ψ разложима в ряд Фурье. Следовательно, функционалы с именами $\delta(x - x_0)$ и $\left(\frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n}{l}(x - x_0)\right)$ действуют одинаково.

Задача 2.8. Докажите, что на интервале $0 < x < l$

$$\delta(x - x_0) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{\pi n}{l}x_0. \quad \blacksquare$$

Аналогично можно выбрать запас пробных функций $\psi(x, t)$ и ввести обобщенные функции как действующие на ψ линейные непрерывные функционалы. Тогда можно определить обобщенные частные производные обобщенных функций: $(f'_x, \psi) = -(f, \psi'_x), (f'_t, \psi) = -(f, \psi'_t), (f''_{xx}, \psi) = (-1)^2(f, \psi''_{xx})$ и т. д.

Уравнение теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$, например, означает теперь равенство обобщенных функций u_t и $a^2 u_{xx}$: $(u_t, \psi) = (a^2 u_{xx}, \psi)$ для любой ψ. Теперь становится ясно, как действие мгновенного точечного источника теплоты записать в дифференциальном уравнении. Пусть в точке ξ в момент времени τ мгновенно выделилось количество теплоты Q (температура стержня до момента τ была нулевой). Тогда дифференциальное уравнение баланса теплоты имеет вид $c\rho u_t = k u_{xx} + Q\delta(x - \xi, t - \tau)$ или

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{Q}{c\rho}\delta(x - \xi, t - \tau).$$

По определению функции Грина решением этого уравнения при $t > \tau$ является $u(x, t) = G(x, \xi; t - \tau)\frac{Q}{c\rho}$. Если источники теплоты распределены по пространственной переменной и по времени, то все их действия надо просуммировать.

Понятие обобщенного решения задачи для дифференциального уравнения или даже только использование обобщенных

функций в постановке задачи может существенно упростить ответы на многие вопросы.

Задача 2.9. Найти функцию $u(x,\ t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < +\infty,\ t > 0,$$

$$u_x(0,\ t) = \nu(t),\ t > 0,$$

$$u(x,\ 0) = 0,\ 0 \le x < +\infty.$$

Решение. Перепишем условие задачи, используя δ-функцию. Задание потока теплоты в точке $x = 0$ можно рассматривать как источник теплоты мощности $Q(t) = -k\nu(t)$, помещенный на конце стержня. Следовательно, при фиксированном τ уравнение и краевое условие можно записать в виде

$$u_t = a^2 u_{xx} + \left(-\frac{k\nu(\tau)}{c\rho}\right)\delta(x, t-\tau).$$

Так как источник поставляет теплоту на стержень во все моменты времени τ, $0 < \tau < t$, то решение исходной задачи имеет вид

$$u(x,t) = \int_0^t \left(-\frac{k\nu(\tau)}{c\rho}\right) G_2(x, \xi = 0; t-\tau)\,d\tau,$$

где G_2 — функция Грина для уравнения теплопроводности на луче с краевым условием второго рода:

$$u(x,t) = -a^2 \int_0^t \left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{-1} \exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\Bigg|_{\xi=0} \nu(\tau)\,d\tau -$$

$$-a^2 \int_0^t \left(2a\sqrt{\pi(t-\tau)}\right)^{-1} \exp\left\{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right\}\Bigg|_{\xi=0} \nu(\tau)\,d\tau =$$

$$= -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \nu(\tau)\,d\tau. \blacksquare$$

Задача 2.10. Найти функцию $u(x,\ t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < +\infty,\ t > 0,$$

$$u(0,\ t) = \mu(t),\ t > 0,$$

$$u(x,\ 0) = 0,\ 0 \leq x < +\infty.$$

Решение. Для решения задачи достаточно решить аналогичную задачу с неоднородным *стационарным* краевым условием. Это утверждает ***принцип Дюамеля:*** пусть функция $U(x,\ t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} U_t = a^2 U_{xx}, 0 < x < +\infty, -\infty < t < +\infty, \\ U(0,t) = \theta(t) = \begin{cases} 0, t < 0, \\ 1, t \geq 0, \end{cases} \\ U(x,t) = 0, 0 < x < +\infty, -\infty < t \leq 0, \end{cases}$$

тогда $u(x,t) = \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t} U(x, t-\tau)\mu(\tau)d\tau$. Действительно, при фиксированном $\tau > 0$ функция $U(x,\ t-\tau)$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} U_t(x, t-\tau) = a^2 U_{xx}(x, t-\tau), 0 < x < +\infty, -\infty < t < +\infty, \\ U(0, t-\tau) = \theta(t-\tau), -\infty < t < +\infty, \\ U(x, t-\tau) = 0, 0 < x < +\infty, -\infty < t \leq \tau, \end{cases}$$

а функция $V(x, t-\tau) = \mu(\tau)\frac{\partial U(x, t-\tau)}{\partial t}$ удовлетворяет задаче с δ-функцией в краевом условии:

$$\begin{cases} V_t(x, t-\tau) = a^2 V_{xx}(x, t-\tau), 0 < x < +\infty, -\infty < t < +\infty, \\ V(0, t-\tau) = \mu(\tau)\theta'(t-\tau) = \mu(\tau)\delta(t-\tau), -\infty < t < +\infty, \\ V(x, t-\tau) = 0, 0 < x < +\infty, -\infty < t \leq \tau. \end{cases}$$

Для функции $u(x,t) = \int\limits_0^t V(x, t-\tau)d\tau$ имеем

$$u_t(x,t) = \int\limits_0^t V_t(x, t-\tau)d\tau + V(x,0) = \int\limits_0^t a^2 V_{xx}(x, t-\tau)d\tau = a^2 u_{xx}(x,t),$$

$u(x,\ t) \equiv 0$ при $t \leq 0$, а при $t > 0$ $u(0,t) = \int\limits_0^t \mu(\tau)\cdot\delta(t-\tau)d\tau = \mu(t)$.

Легко видеть, что при $t > 0$ $U(x,t) = 1 - erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$.

Поэтому $u(x,t) = \int\limits_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi}a(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right\} \mu(\tau)d\tau$. ■

Замечание 2.27. Понятие обобщенных функций и некоторые операции над ними были здесь введены на интуитивном уровне. Чтобы строго изложить теорию обобщенных функций, надо прежде всего точно задать множество пробных функций ψ и специальным образом ввести в нем сходимость. Это требуется для определения непрерывности линейных функционалов f и корректного введения операций над ними. ■

2.7.3. Обобщенные решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности. Интегральные тождества

Покажем (на интуитивном уровне рассуждений), как можно двумя способами ввести понятие обобщенного решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности. Пусть по-прежнему D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с замкнутой границей S, $n = 1, 2, 3$, $\overline{D} = D \cup S$; $Q_T = D \times \{0 < t < T\}$ — открытый цилиндр; $D_0 = D \times \{t = 0\}$ — нижнее основание Q_T; $D_T = D \times \{t = T\}$ — его верхнее основание; $\overline{D}_0 = \overline{D} \times \{t = 0\}$; $\overline{D}_T = \overline{D} \times \{t = T\}$; $\overline{Q}_T = \overline{D} \times \{0 \le t \le T\}$; $\Gamma_T = S \times \{0 < t < T\}$.

Пусть в $\overline{Q}_T$ поставлена первая или третья (вторая при $h \equiv 0$) начально-краевая задача относительно функции $u = u(M, t)$:

$$u_t = a^2 \Delta_M u + f(M, t),\ (M, t) \in Q_T; \tag{2.46}$$

$$u\big|_{\overline{D}_0} = \varphi(M),\ M \in \overline{D}; \tag{2.47}$$

$$u\big|_{\Gamma_T} = 0 \tag{2.48}$$

или

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + h(P)u(P,t)\right)\Big|_{\Gamma_T} = 0,\ (P, t) \in \Gamma_T; \tag{2.49}$$

где $h \in C(\Gamma_T)$, $h(P) \ge 0$.

Случай неоднородных краевых условий заменой искомой функции сводится к случаю однородных краевых условий, поэтому будем рассматривать только (2.48) или (2.49).

Пусть существуют последовательности функций $\{f_k\}$ и $\{\varphi_k\}$, которые при любом $T > 0$ *равномерно* сходятся при $k \to \infty$: $f_k \to$ $\to f$ в $C\left(\overline{Q}_T\right)$, $\varphi_k \to \varphi$ в $C\left(\overline{D}\right)$. Пусть при каждом $k = 1, 2, \ldots$ существует классическое решение $u_k(M, t)$ начально-краевой задачи с функциями f_k и φ_k вместо f и φ. Если существует непрерывная в $\overline{Q}_\infty$ функция $u(M, t)$, к которой при любом $T > 0$ классические решения сходятся *равномерно*: $u_k \to u$ в $C\left(\overline{Q}_T\right)$ при $k \to \infty$, то $u(M, t)$ называют *обобщенным решением* исходной задачи. В частности, классическое решение, если оно существует, является обобщенным решением. Для существования решения, обобщенного в указанном смысле, необходимо выполнение следующих условий: $f \in C\left(\overline{Q}_\infty\right)$, $\varphi \in C\left(\overline{D}\right)$; $\lim\limits_{t \to 0+} u(M,t) = \varphi(M)$, $M \in \overline{D}$, функция $u(M,t)$ удовлетворяет уравнению (2.46) в смысле обобщенных функций:

$$\int\limits_{Q_\infty} u(M,t)\left(-\psi'_t - a^2 \Delta_M \psi\right) dD_M dt = \int\limits_{Q_\infty} f(M,t)\psi(M,t)\, dD_M dt$$ — для

любой пробной функции $\psi(M, t)$, бесконечно дифференцируемой и отличной от нуля лишь в некоторой ограниченной подобласти области Q_∞.

Обобщенное решение единственно и непрерывно зависит от f и φ в смысле равномерной сходимости.

Можно определить обобщенное решение начально-краевой задачи в другом смысле, если по-другому понимать приближение функций f, φ, u функциями f_k, φ_k, u_k. Пусть для определенных в Q_T действительных функций $u(M, t)$ и $w(M, t)$ существуют интегралы $\int\limits_{Q_T} u^2(M,t)\, dD_M dt$ и $\int\limits_{Q_T} w^2(M,t)\, dD_M dt$ (это записывают в виде $u \in L_2(Q_T)$, $w \in L_2(Q_T)$, $\|u - w\|^2_{L_2} = \int\limits_{Q_T} \left(u(M,t) - w(M,t)\right)^2 dD_M dt$).

Пусть $u(M, t)$ и $w(M, t)$ имеют обобщенные первые производные по пространственным переменным, являющиеся (обычными) функциями из $L_2(Q_T)$. Тогда можно ввести скалярное произведение $(u, w)_{1,0} = \int\limits_{Q_T} \left[(grad_M u, grad_M w) + uw\right] dD_M dt$ и евклидову норму $\|u\|_{1,0} = \sqrt{(u,u)_{1,0}}$. Приближать функции f, φ, u будем в смысле сходимостей $f_k \to f$ по норме в $L_2(Q_T)$, $\varphi_k \to \varphi$ по норме в $L_2(D)$, $u_k \to u$ по норме $||u - u_k||_{1,0}$.

Замечание 2.28. Интегралы здесь следует понимать в более широком, чем по Риману, смысле — *по Лебегу.* ■

Определение обобщенных решений начально-краевых задач основано на интегральных тождествах для их классических решений.

Теорема 2.13. Принадлежащее $C^{1,0}\left(Q_T \cup \Gamma_T\right)$ классическое решение $u(M,\, t)$ первой начально-краевой задачи (2.46), (2.47), (2.48) удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} \left(-uv_t + a^2\left(\operatorname{grad}_M u, \operatorname{grad}_M v\right)\right) dD_M dt = \\ = \int\limits_{D_0} \varphi v dD_M + \int\limits_{Q_T} fv dD_M dt \tag{2.50}$$

для всех функций $v(M,t) \in C^1\left(\overline{Q}_T\right)$, удовлетворяющих условиям

$$v\big|_{D_T} = 0 \tag{2.51}$$

и

$$v\big|_{\Gamma_T} = 0. \tag{2.52}$$

Классическое решение $u(M,\, t)$ третьей (второй при $h \equiv 0$) начально-краевой задачи (2.46), (2.47), (2.49) удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q_T} \left(-uv_t + a^2\left(\operatorname{grad}_M u, \operatorname{grad}_M v\right)\right) dD_M dt + a^2 \int\limits_{\Gamma_T} h(P) uv dS_P dt = \\ = \int\limits_{D_0} \varphi v dD_M + \int\limits_{Q_T} fv dD_M dt \tag{2.53}$$

для всех $v(M,t) \in C^1\left(\overline{Q}_T\right)$, удовлетворяющих условию (2.51).

Доказательство. Идея доказательства теоремы состоит в следующем. Умножим уравнение (2.46) на произвольную функцию $v(M,\, t)$ указанного в теореме типа и проинтегрируем полученное равенство по Q_T. Применим вытекающую из теоремы Остроградского *первую формулу Грина*:

$$\int\limits_D v \Delta_M u dD_M = \int\limits_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int\limits_D \left(\operatorname{grad}_M u, \operatorname{grad}_M v\right) dD_M,$$

затем проинтегрируем ее по $0 < t < T$. ■

Определение 2.5. ***Обобщенным решением первой начально-краевой задачи*** (2.46), (2.47), (2.48) называют функцию $u(M, t)$ с конечной нормой $||u||_{1,0}$, если $u(M, t)$ удовлетворяет краевому условию (2.48) и тождеству (2.50) для любой функции $v(M, t)$, имеющей все обобщенные первые производные из $L_2(Q_T)$ и удовлетворяющей (2.51) и (2.52).

Определение 2.6. ***Обобщенным решением третьей*** (***второй*** при $h \equiv 0$) ***начально-краевой задачи*** (2.46), (2.47), (2.49) называют функцию $u(M, t)$ с конечной нормой $||u||_{1,0}$, если $u(M, t)$ удовлетворяет тождеству (2.53) для любой функции $v(M, t)$, имеющей все обобщенные первые производные из $L_2(Q_T)$ и удовлетворяющей (2.51).

Теорема 2.14. Каждая из задач (2.46), (2.47), (2.48) или (2.46), (2.47), (2.49) не может иметь более одного обобщенного решения в смысле интегральных тождеств.

Доказательство. Пусть задача (2.46), (2.47), (2.48) или (2.46), (2.47), (2.49) имеет обобщенные решения $u_1(M, t)$ и $u_2(M, t)$ в смысле интегральных тождеств.

Тогда функция $u(M, t) = u_1(M, t) - u_2(M, t)$ является обобщенным решением задачи с $f \equiv 0$ и $\varphi \equiv 0$. Выберем определенную в Q_T функцию $v(M,t) = \int_t^T u(M,\tau)d\tau$; она имеет обобщенные производные $v_t = -u$, $v_x = \int_t^T u_x(M,\tau)d\tau$ $(M = M(x, y, z))$, и аналогично можно записать v_y, v_z.

Функция v и ее первые производные принадлежат $L_2(Q_T)$. При $t = T$ имеем $v|_{D_T} = 0$. Кроме того, $v|_{\Gamma_T} = \int_t^T u|_{\Gamma_T} d\tau$, поэтому в задаче (2.46), (2.47), (2.48) получим $v|_{\Gamma_T} = 0$.

Для выбранной функции v запишем тождества (2.50) или (2.53):

$$\int_{Q_T}\left[u^2 + a^2\left(grad_M u, \int_t^T grad_M u(M,\tau)d\tau\right)\right]dD_M dt = 0, \quad (2.54)$$

$$\int\limits_{Q_T}\left[u^2+a^2\left(\operatorname{grad}_M u,\int\limits_t^T \operatorname{grad}_M u(M,\tau)d\tau\right)\right]dD_M dt+$$

$$+a^2\int\limits_{\Gamma_T} h(P)u(P,t)\int\limits_t^T u(P,\tau)d\tau dS_P dt=0. \tag{2.55}$$

Покажем, что

$$\int\limits_{Q_T}\left(\operatorname{grad}_M u,\int\limits_t^T \operatorname{grad}_M u(M,\tau)d\tau\right)dD_M dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_D\left|\int\limits_0^T \operatorname{grad}_M u(M,t)dt\right|^2 dD_M\geq 0, \tag{2.56}$$

$$\int\limits_{\Gamma_T} h(P)u(P,t)\int\limits_t^T u(P,\tau)d\tau dS_P dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_S h(P)\left(\int\limits_0^T u(P,t)dt\right)^2 dS_P\geq 0. \tag{2.57}$$

Действительно, $\int\limits_{Q_T}\ldots dD_M dt=\int\limits_D\int\limits_0^T\ldots dt dD_M$, и равенство в (2.56) следует из равенств

$$I=\int\limits_0^T\left(\operatorname{grad}u(M,t),\int\limits_t^T \operatorname{grad}u(M,\tau)d\tau\right)dt=$$

$$=\int\limits_0^T\left(\operatorname{grad}u(M,\tau),\int\limits_0^\tau \operatorname{grad}u(M,t)dt\right)d\tau=$$

$$=\int\limits_0^T\left(\operatorname{grad}u(M,\tau),\int\limits_0^T \operatorname{grad}u(M,t)dt\right)d\tau-$$

$$-\int\limits_0^T\left(\operatorname{grad}u(M,\tau),\int\limits_\tau^T \operatorname{grad}u(M,t)dt\right)d\tau=$$

$$=\left|\int\limits_0^T \operatorname{grad}u(M,t)dt\right|^2-I.$$

Аналогично, $\int\limits_{\Gamma_T} \ldots dS_P dt = \int\limits_S \int\limits_0^T \ldots dt dS_P$, и равенство в (2.57) следует из равенств

$$J = \int\limits_0^T u(P,t) \int\limits_t^T u(P,\tau)\, d\tau\, dt =$$

$$= \int\limits_0^T u(P,\tau) \int\limits_0^\tau u(P,t)\, dt d\tau = \int\limits_0^T u(P,\tau) \int\limits_0^T u(P,t)\, dt d\tau -$$

$$- \int\limits_0^T u(P,\tau) \int\limits_\tau^T u(P,t)\, dt d\tau = \left(\int\limits_0^T u(P,t)\, dt \right)^2 - J.$$

Учитывая, что $h(P) \geq 0$, получаем неравенство (2.57).

Из (2.54) в силу неравенства (2.56) получаем $\int\limits_{Q_T} u^2 dD_M dt \leq 0$,

откуда $u = 0$ в Q_T. То же самое следует из (2.55) в силу неравенств (2.56), (2.57). ■

Замечание 2.29. Проведенное доказательство является лишь схемой рассуждений, поскольку производные в теореме понимаются в обобщенном смысле, а интегралы — в смысле Лебега. Доказательство является строгим, если подразумевать использование свойств интеграла Лебега. ■

Следствие 2.1. Третья (вторая при $h \equiv 0$) начально-краевая задача (2.46), (2.47), (2.49) не может иметь более одного *классического решения.*

Доказательство. Если u_1, u_2 — классические решения задачи (2.46), (2.47), (2.49), то $u_1 - u_2$ является классическим решением такой же задачи с $\varphi \equiv 0$ и $f \equiv 0$. Тогда $u_1 - u_2$ будет и обобщенным решением, которое по доказанной теореме равно нулю. ■

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть $u(x, t)$ — температура стержня $0 \leq x \leq l$ с коэффициентом теплопроводности $k = \text{const}$; $W = \text{const} > 0$, $[W] = \dfrac{\text{Дж}}{\text{с} \cdot \text{см}^2}$. Какой физический смысл имеет каждое из следующих краевых условий: $u_x(0,t) = -\dfrac{W}{k}$; $u_x(0,t) = \dfrac{W}{k}$; $u_x(l,t) = -\dfrac{W}{k}$; $u_x(l,t) = \dfrac{W}{k}$?

2. Источник теплоты известной мощности находится на конце стержня и подает теплоту внутрь стержня. Запишите краевое условие для левого и для правого концов стержня.

3. Пусть среда, окружающая стержень $0 \le x \le l$, имеет известную температуру $u_{\text{среды}}(t)$. Какой физический смысл имеет краевое условие $-k\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \lambda\big(u_{\text{среды}}(t) - u(0,t)\big)$ $(\lambda = \text{const})$? Во что превратится это краевое условие, если λ очень велико? Если λ исчезающе мало? Запишите аналогичное краевое условие для правого конца стержня.

Какой физический смысл имеет краевое условие

$$-k\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \lambda\big(u_{\text{среды}}(t) - u(0,t)\big) + f(t)?$$

4. Пусть в области $D = \{-\infty < x < +\infty\}$ граница раздела лед—вода имеет координату $x = S(t)$ в момент времени t. Пусть $u(x, t)$ — температура льда или воды; $k_{\text{л}}$, $k_{\text{в}}$ — коэффициенты теплопроводности льда и воды; $\lambda > 0$ — скрытая теплота плавления льда, отнесенная к единице его массы; $\rho_{\text{л}}$ — объемная плотность массы льда. Что означает условие $k_{\text{л}}\dfrac{\partial u\big(S(t)-0,t\big)}{\partial x} - k_{\text{в}}\dfrac{\partial u\big(S(t)+0,t\big)}{\partial x} = \lambda\rho_{\text{л}}\dfrac{dS}{dt}$, если $\dfrac{dS}{dt} > 0$? $\dfrac{dS}{dt} < 0$?

5. Пусть функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$ при $0 < x < l$, $t > 0$ и краевым условиям $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$ при $t \ge 0$.

Достаточно ли этих условий для выделения единственного решения уравнения?

Указание. Рассмотрите однопараметрическое семейство функций

$$\left\{u_n(x,t) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t\right\}, n = 0,1,2,\ldots\right\}.$$

6. Пусть функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$ при $0 < x < l$, $t > 0$ и краевым условиям $u_x(0, t) = 0$, $u_x(l, t) = 0$ при $t \ge 0$.

Достаточно ли этих условий для выделения единственного решения уравнения?

Указание. Рассмотрите семейство функций

$$\left\{u_n(x,t) = \cos\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t\right\}, n = 0,1,2,\ldots\right\}.$$

7. Пусть функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$ при $0 < x < l$, $t > 0$ и условиям $u_x(0, t) = 0$ при $t > 0$, $u(x, 0) = u_0 x$ при $0 \le x \le l$, $u_0 = \text{const}$.

Достаточно ли написанных здесь условий для выделения единственного решения уравнения?

Указание. Рассмотрите два случая изменения температуры стержня:

— если к написанным условиям добавлено условие $u(l,\ t) = u_0 l$;

— если к написанным условиям добавлено условие $u_x(l,\ t) = 0$.

Какой будет температура стержня при $t \to +\infty$ в каждом из этих двух случаев? О каком решении идет речь: о классическом или обобщенном?

8. Сформулируйте определение классического решения следующей задачи:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,\ t),\ 0 < x < l,\ t > 0;$$

$$u(x,\ 0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l;$$

$$u(0,\ t) = \mu(t),\ u_x(l,\ t) = \nu(t),\ t \ge 0.$$

Каким требованиям должны удовлетворять функции f, φ, μ, ν?

9. Дайте физическую интерпретацию задачи о температуре стержня $u(x,\ t)$:

$$u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0;$$

$$u(0,\ t) = 0,\ u_x(\pi,\ t) = 0,\ t \ge 0;$$

$$u(x,\ 0) = u_0 \cos(3x/2),\ 0 \le x \le \pi,\ u_0 = \text{const}.$$

Найдите $u(x,\ t)$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$, а также зависимость от времени плотности теплового потока через конец $x = \pi$.

10. Дайте физическую интерпретацию задачи о температуре стержня $u(x,\ t)$:

$$u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0;$$

$$u(0,\ t) = 0,\ u_x(\pi,\ t) = 0,\ t \ge 0;$$

$$u(x,\ 0) = u_0 \sin(5x/2),\ 0 \le x \le \pi,\ u_0 = \text{const}.$$

Найдите $u(x,\ t)$ и $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$, а также зависимость от времени плотности теплового потока через конец $x = 0$.

11. Боковая поверхность однородного стержня $0 \le x \le l$, теплоизолирована. Внешних источников теплоты нет. Левый конец стержня поддерживается при температуре $u_1 = \text{const}$, а правый — при температуре $u_2 = \text{const}$. Начальное распределение температуры равно $u_0 \dfrac{x}{l}$, $u_0 = \text{const}$.

Запишите математическую постановку этой задачи; идет ли речь о классическом решении? Решите задачу методом разделения переменных. Найдите предельное распределение температуры при $t \to +\infty$. Какому уравнению и каким краевым условиям оно удовлетворяет?

12. Боковая поверхность однородного стержня $0 \le x \le l$ теплоизолирована, источников теплоты в нем нет. Конец $x = 0$ поддерживается при температуре $u_0 = \text{const}$, а конец $x = l$ теплоизолирован. Начальная температура стержня равна нулю.

Запишите математическую постановку задачи; идет ли речь о классическом решении? Решите задачу методом разделения переменных. Найдите предельное распределение температуры при $t \to +\infty$. Какому уравнению и каким краевым условиям оно удовлетворяет?

13. Боковая поверхность однородного стержня $0 \le x \le l$ теплоизолирована, источников теплоты в нем нет. Конец стержня $x = 0$ поддерживается при нулевой температуре, а на конце $x = l$ внутрь стержня подается поток теплоты с плотностью $W = \text{const} > 0$. Начальная температура стержня равна нулю. Коэффициент теплопроводности стержня равен k.

Найдите температуру стержня $u(x, t)$ и ее предельное распределение при $t \to +\infty$.

14. Боковая поверхность однородного стержня $0 \le x \le l$ теплоизолирована, источников теплоты в нем нет. На конце $x = 0$ внутрь стержня подается поток теплоты с плотностью $W = \text{const} > 0$, а на конце $x = l$ такой же поток теплоты направлен из стержня. Начальная температура стержня равна нулю. Коэффициент теплопроводности стержня равен k.

Найдите температуру стержня $u(x, t)$. Какова ее зависимость от времени при $x = \dfrac{l}{2}$? Найдите предельное распределение температуры при $t \to +\infty$. Какому уравнению и каким краевым условиям оно удовлетворяет?

15. Решите задачу

$$u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0;$$

$$u_x(0, t) = 0,\ u_x(l, t) + hu(l, t) = 0,\ h = \text{const} > 0,\ t \ge 0;$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l,$$

методом разделения переменных.

Указание. Поставьте задачу Штурма—Лиувилля. Найдите общее решение уравнения для функции $X(x)$. При каких λ можно удовлетворить краевым условиям выбором постоянных в этом решении? Получите при $\lambda > 0$ из правого краевого условия уравнение $\operatorname{tg}\left(\sqrt{\lambda} l\right) = \dfrac{h}{\sqrt{\lambda}}$ относительно λ. Выполните в нем замену $\theta = \sqrt{\lambda} l$. Нарисуйте графики функций $\operatorname{tg}\theta$ и $\dfrac{\text{const}}{\theta}$. Как найти собственные значения задачи Штурма—Лиувилля? Сколько их? Какова асимптотика λ_n на бесконеч-

ности? Найдите собственные функции задачи X_n. Образуют ли они ортогональную систему? Найдите норму каждой собственной функции. Зависит ли $||X_n||$ от параметра h? Во что превратится $||X_n||$, если положить $h = 0$? Во что превратится правое краевое условие при $h = 0$? Сравните решение этой задачи с решением задачи при $h = 0$.

16. Среда, в которой находится однородный стержень $0 \leq x \leq l$, имеет постоянную температуру $u_{\text{среды}}$. На боковой поверхности стержня происходит теплообмен со средой по закону Ньютона. Других внешних источников теплоты нет. Левый конец стержня теплоизолирован, а правый поддерживается при постоянной температуре $u_{\text{среды}}$. Начальное распределение температуры стержня равно $u_0 = \text{const}$.

Запишите математическую постановку этой задачи; идет ли речь о классическом решении? Найдите температуру стержня $u(x,\ t)$ и ее предельное распределение при $t \to +\infty$.

17. Однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью нагревается источником теплоты постоянной мощности, равномерно распределенной по всему стержню. В начальный момент времени температура стержня равна нулю, а концы стержня всегда поддерживаются при нулевой температуре.

Найдите температуру стержня $u(x,\ t)$ и ее предельное распределение при $t \to +\infty$.

18. Однородный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью нагревается источником теплоты постоянной мощности, равномерно распределенной по всему стержню. В начальный момент времени температура стержня равна нулю. Концы стержня теплоизолированы.

Найдите температуру стержня $u(x,\ t)$. Существует ли конечный $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$?

19. Решите задачу об остывании однородного тела кубической формы, равномерно нагретого до температуры $u_0 = \text{const}$. Источников теплоты в теле нет. На границе тела во все моменты времени $t > 0$ поддерживается нулевая температура.

20. Однородное тело имеет форму прямоугольного параллелепипеда $\bar{D} = \{0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2, 0 \leq z \leq l_3\}$ в $Oxyz$. Его грани $y = 0$ и $z = l_3$ поддерживаются при нулевой температуре, а остальные теплоизолированы; источников теплоты в теле нет. Начальная температура тела равна $u_0 \dfrac{xyz}{l_1 l_2 l_3}$, $u_0 = \text{const}$.

Найдите температуру тела и ее предельное распределение при $t \to +\infty$.

21. Начальная температура однородного шара с радиусом r_0 равна $u_0 = \text{const}$. Во все моменты времени $t > 0$ его поверхность поддерживается при нулевой температуре; источников теплоты в шаре нет.

Найдите температуру шара при $t > 0$.

22. $u_t = a^2 u_{xx}$, $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$,

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0, -\infty < x < -l, \\ u_0 = \text{const} \neq 0, -l < x < l, \\ 0, l < x < +\infty. \end{cases}$$

Найдите $u(x,t)$, $\lim\limits_{t \to 0+} u(-l,t)$, $\lim\limits_{t \to 0+} u(l,t)$.

23. Однородный полуограниченный стержень $0 \leq x < +\infty$ без источников теплоты имеет нулевую начальную температуру. Его боковая поверхность теплоизолирована, а конец $x = 0$ поддерживается при температуре $u_0 = \text{const} \neq 0$ при $t > 0$.

Найдите температуру стержня $u(x,\ t)$ во все моменты времени и $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$. Найдите поток теплоты через конец $x = 0$ при $t \geq 0$.

24.
$$u_t = a^2 u_{xx} - h(u - u_0),\ 0 < x < +\infty,\ t > 0,$$
$$h = \text{const} > 0,\ u(0,\ t) = u_0 = \text{const},\ t > 0;$$
$$u(x,\ 0) = 0,\ 0 \leq x < +\infty.$$

Дайте физическую интерпретацию задачи и решите ее.

25. Конец $x = 0$ однородного полуограниченного стержня $0 \leq x < +\infty$ поддерживается при температуре $u_0 = \text{const}$. Начальная температура стержня $u_0/2$. Боковая поверхность стержня теплоизолирована, источников теплоты в нем нет.

Найдите температуру стержня в моменты времени $t > 0$ и ее предел при $t \to +\infty$.

26. Найдите решение $u(x,\ t)$ следующей задачи:

$$u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < +\infty,\ t > 0;$$
$$u(0,\ t) = 0,\ t \geq 0;\ u(x,\ 0) = u_0 \sin x,\ 0 \leq x < +\infty.$$

Найдите $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$.

27. Найдите решение $u(x,\ t)$ следующей задачи:

$$u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < +\infty,\ t > 0;$$
$$u_x(0,\ t) = 0,\ t \geq 0;\ u(x,\ 0) = u_0 \cos x,\ 0 \leq x < +\infty.$$

Найдите $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$.

28. Исходя из разложения решения следующей задачи в ряд по собственным функциям, найдите ее функцию Грина:

$$u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0;$$
$$u(0,\ t) = 0,\ u(l,\ t) = 0,\ t > 0;$$
$$u(x,0) = \delta(x - \xi) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} \xi,\ 0 < x < l,\ 0 < \xi < l.$$

Глава 3

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

Выделить конкретный стационарный процесс, протекающий в заданной области, можно, например, с помощью некоторых условий на ее границе. Такая информация о стационарном процессе приводит к краевым задачам для уравнений Лапласа или Пуассона.

Полное исследование корректности этих задач можно получить из теории Фредгольма, если свести краевую задачу к интегральному уравнению. Теория интегральных уравнений Фредгольма играет существенную роль в математической физике и изучается в отдельном курсе.

В данной главе основное внимание уделено математическим постановкам краевых задач и доказательству единственности их решений. Для этого подробно изучены свойства гармонических функций. Рассмотрен также вопрос о единственности решений краевых задач в ограниченной области для бигармонического уравнения и для уравнения Гельмгольца.

3.1. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Фундаментальные решения уравнения Лапласа. Пример Адамара

3.1.1. Краевые условия

Как отмечалось в гл. 1, дифференциальный оператор $\Delta u \equiv \equiv \operatorname{divgrad} u$ называется ***оператором Лапласа***; $\Delta u = 0$ — уравнение Лапласа; это уравнение эллиптического типа. Рассмотрим удовлетворяющие уравнению Лапласа действительные функции $u = u(M)$ точки M в пространстве $\mathbb{R}^3$ или на плоскости $\mathbb{R}^2$.

Определение 3.1. Дважды непрерывно дифференцируемая в области D функция $u(M)$, удовлетворяющая в D уравнению Лапласа, называется ***гармонической в этой области функцией.***

В гл. 1 показано, что к уравнению Лапласа приводит описание многих *стационарных* физических процессов и явлений. Например, уравнению Лапласа удовлетворяет не зависящая от времени температура в однородном теле или в однородной пластине в отсутствие источников теплоты. Уравнение Лапласа выражает отсутствие источников в рассматриваемой области. Если же такие источники имеются, то вместо уравнения Лапласа получим уравнение Пуассона $\Delta u = -f$.

Для однозначного определения искомой функции $u(M)$ в области D требуются дополнительные условия. Чаще всего на границе S области D ставятся *краевые условия* одного из следующих типов:

I. $u(P) = \mu(P)$, $P \in S$ (первая краевая задача);

II. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{P \in S} = \nu(P)$ (вторая краевая задача);

III. $\alpha \dfrac{\partial u(P)}{\partial n} + \beta u(P) = \chi(P), P \in S$ (общая или третья краевая задача), где $\alpha + \beta \neq 0, \alpha \geq 0, \beta \geq 0, \mu, \nu, \alpha, \beta, \chi$ — заданные функции;

$\dfrac{\partial u}{\partial n}$ — производная функции $u(M)$ по внешней нормали к границе S.

Первую краевую задачу называют задачей Дирихле, вторую — задачей Неймана. Изучая именно третью краевую задачу, будем полагать, что $\alpha(P) \neq 0$ всюду на S. Тогда краевое условие $\alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u = \chi$ можно записать в виде $\dfrac{\partial u}{\partial n} + hu = \eta$, где $h = \dfrac{\beta}{\alpha}$, $\eta = \dfrac{\chi}{\alpha}$.

Если решение задачи ищется в ограниченной области, то задачу называют *внутренней*, если же — вне ограниченной области, то — *внешней* краевой задачей.

Решения всех краевых задач будем подразумевать *классическими*; это накладывает определенные требования на постановку задачи. Следует отметить, что многие практические задачи не удовлетворяют таким требованиям. Это приводит к необходимости обобщения понятия решения.

3.1.2. Внутренняя задача Дирихле

Внутренняя задача Дирихле имеет вид

$$\Delta u(M) = 0,\ M \in D,$$

$$u(P) = \mu(P),\ P \in S.$$

Пусть D — *ограниченная* область (в $\mathbb{R}^3$ или в $\mathbb{R}^2$) с достаточно гладкой границей S (S — замкнутая поверхность в $\mathbb{R}^3$ или S — замкнутая кривая в $\mathbb{R}^2$).

Постановка задачи о нахождении *классического решения*: найти функцию $u(M)$, которая определена и непрерывна в замкнутой области $\overline{D} = D \cup S$, удовлетворяет внутри области D уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ и принимает на границе S заданные значения: $u(P) = \mu(P)$, $P \in S$.

Таким образом, надо найти функцию $u(M)$, гармоническую внутри D. Требование гармоничности функции $u(M)$ на границе излишне. Условие непрерывности функции $u(M)$ в замкнутой области необходимо для единственности решения задачи. Если это условие отбросить, то единственность решения задачи нарушится, так как любая функция вида $u(M) = \begin{cases} \text{const}, M \in D, \\ \mu(M), M \in S, \end{cases}$ будет решением задачи. Поэтому требуем, чтобы $\mu \in C(S)$. В этом случае функция $u(M)$ называется классическим решением задачи.

Классическое решение $u(M) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, а определяющая его функция, заданная в краевом условии, $\mu \in C(S)$.

3.1.3. Внутренняя задача Неймана

Внутренняя задача Неймана имеет вид

$$\Delta u(M) = 0,\ M \in D, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} = \nu(P),\ \ P \in S. \tag{3.2}$$

Постановка задачи о нахождении *классического решения*: найти функцию $u(M)$, которая определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\overline{D}$ ($D \subset \mathbb{R}^3$ или $D \subset \mathbb{R}^2$), удовлетворяет внутри области D уравнению Лапласа

$\Delta u = 0$, а ее нормальная производная принимает на границе заданные значения $\left.\dfrac{\partial u(P)}{\partial n}\right|_{P\in S} = \nu(P),\ P \in S.$

Репение $u(M) \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2(D)$, а задающая краевое условие функция $\nu \in C(S)$.

Очевидно, что если $u(M)$ — репение задачи Неймана, то $w(M) = u(M) + C$, где $C = \text{const}$ также является решением той же задачи Неймана.

Это легко проверить, если подставить функцию $w(M)$ в задачу (3.1) , (3.2).

3.1.4. Внутренняя третья краевая задача

Внутренняя третья краевая задача имеет вид

$$\Delta u(M) = 0,\ M \in D,$$

$$\alpha(P)\frac{\partial u(P)}{\partial n} + \beta(P)u(P) = \chi(P),\ P \in S,\ \alpha(P) \geq 0,\ \beta(P) \geq 0,$$

$$a(P) + \beta(P) > 0.$$

Пусть коэффициент $\alpha(P)$ не равен нулю всюду на S. Тогда разделим граничное условие на $\alpha(P)$ и получим задачу

$$\Delta u(M) = 0,\ M \in D, \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial u(P)}{\partial n} + h(P)u(P) = \eta(P),\ P \in S, \tag{3.4}$$

где функция $h(P) = \dfrac{\beta(P)}{\alpha(P)}$ не равна тождественно нулю на S (иначе получим вторую краевую задачу, а не третью); $\eta(P) = \dfrac{\chi(P)}{\alpha(P)}$.

Постановка задачи о нахождении *классического решения*: найти функцию $u(M)$, которая определена, непрерывна и непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\overline{D}$ ($D \subset \mathbb{R}^3$ или $D \subset \mathbb{R}^2$), удовлетворяет внутри области D уравнению Лапласа $\Delta u = 0$, удовлетворяет на границе условию (3.4). Решение $u(M) \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2(D)$, а задающие краевое условие функции $\eta(P) \in C(S),\ h(P) \in C(S)$.

3.1.5. Внешние краевые задачи

Внешние задачи ставятся по-разному в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$. Это связано с различием в поведении на бесконечности *фундаментальных решений* уравнения Лапласа в трехмерном и двумерном случаях.

Пусть $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ — некоторая фиксированная точка в $\mathbb{R}^3$. Найдем решение $u(M)$, $M = M(x,\ y,\ z)$, уравнения Лапласа, зависящее только от $R_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$. Введем сферическую систему координат $(r,\ \theta,\ \varphi)$ с центром в точке M_0. Такое решение будет обладать сферической симметрией, т. е. $\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = 0,\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$. Следовательно, будет выполняться уравнение

$$\Delta u \equiv \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\,\frac{du}{dr}\right) = 0.$$ Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u(r) = \frac{C_1}{r} + C_2,\ \text{где}\ r = R_{MM_0}.$$

Решение $u(M, M_0) = \dfrac{1}{R_{MM_0}}$ называется *фундаментальным решением* уравнения Лапласа в пространстве. Это гармоническая функция переменной M, определенная всюду в $\mathbb{R}^3$, кроме точки $M = M_0$.

В двумерном случае введем полярную систему координат $(r,\ \varphi)$ с центром в точке $M_0(x_0,\ y_0)$.

Найдем решение $u(M)$, $M = M(x,\ y)$, уравнения Лапласа, зависящее только от $R_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$. В этом случае $\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$, и выполняется уравнение $\Delta u \equiv \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\,\dfrac{du}{dr}\right) = 0$. Его общее решение имеет вид $u(r) = C_1 \ln\dfrac{1}{r} + C_2,\ \text{где}\ r = R_{MM_0}$.

Функция $u(M, M_0) = \ln\dfrac{1}{R_{MM_0}}$ называется *фундаментальным решением* уравнения Лапласа на плоскости.

Для однозначного нахождения классического решения внешней краевой задачи нужно потребовать определенного поведения искомой функции на бесконечности. Далее постановки внешних краевых задач будем рассматривать отдельно.

3.1.6. Пример некорректной задачи

Изучим в данной главе внутренние и внешние краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона с указанными выше краевыми условиями. При этом нас будут интересовать вопросы о существовании решения, о его единственности (или о единственности с точностью до произвольного постоянного слагаемого), об устойчивости решения. Отметим, что встречаются практически важные задачи для уравнения Лапласа, которые совокупностью этих свойств не обладают.

Пример Адамара — задача Коши для уравнения Лапласа:

$$\Delta u(x,\ y) = 0 \text{ в } D = \{-\infty < x < +\infty,\ 0 < y < l\}, \quad (3.5)$$

$$u(x,\ 0) = \Psi_0(x),\ u_y(x,\ 0) = \Psi_1(x),\ -\infty < x < +\infty. \quad (3.6)$$

Требуется найти функцию $u(x,\ y)$, гармоническую в полосе D, непрерывную в $\overline{D} = \{-\infty < x < +\infty, 0 \le y \le l\}$ и имеющую в $\overline{D}$ непрерывную производную u_y, удовлетворяющую при $y = 0$ «начальным» условиям (3.6). К (3.5), (3.6) приводит, например, задача о продолжении потенциала $u(x,\ y)$ некоторого поля по измерениям этого потенциала и напряженности при $y = 0$. Заметьте, что прямая $\gamma = \{-\infty < x < +\infty,\ y = 0\}$ не имеет характеристических точек уравнения (3.5).

Пусть $\Psi_0(x) \equiv 0$. Рассмотрим в условии для $u_y(x, 0)$ последовательность функций $\Psi_{1,0}(x) \equiv 0,\ \Psi_{1,n}(x) = \dfrac{1}{n}\sin(nx)$ при $n = 1, 2, \ldots$

Им отвечают решения задачи (3.5), (3.6) $u_0(x,\ y) \equiv 0$, $u_n(x,y) = \dfrac{1}{n^2}\sin(nx)\operatorname{sh}(ny)$ (проверьте!). При $n \to \infty$ получаем

$$\max_{-\infty<x<+\infty} \left|\Psi_{1,n}(x) - \Psi_{1,0}(x)\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0, \text{ но } \max_{(x,y)\in\overline{D}} \left|u_n(x,y) - u_0(x,y)\right| \underset{n\to\infty}{\to} \infty.$$

Решение задачи (3.5), (3.6) не является устойчивым, эта задача *некорректна.* ■

3.2. Формулы Грина в ограниченной области

3.2.1. Первая формула Грина в области $D \subset \mathbb{R}^3$

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$, границей которой является замкнутая поверхность S; $\overline{D} = D \cup S$. Будем считать всю-

ду далее, что S — достаточно гладкая поверхность, к которой применима формула Остроградского.

Теорема 3.1. Пусть в области D заданы две функции $u(M)$ и $v(M)$: $u, v \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2\left(D\right)$. Тогда в D справедлива первая формула Грина:

$$\iiint\limits_D v\Delta u dD = \iint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n}dS - \iiint\limits_D (\mathrm{grad}u, \mathrm{grad}v)dD. \qquad (3.7)$$

Доказательство. Первая формула Грина получается из формулы Остроградского

$$\iiint\limits_D \mathrm{div}\mathbf{A}dD = \iint\limits_S (\mathbf{A}, \mathbf{n})dS$$

($\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к S; dD — элемент объема; dS — элемент площади поверхности), если специальным образом выбрать векторное поле $\mathbf{A}$.

Возьмем в качестве этого векторного поля $\mathbf{A} = v(M)\mathrm{grad}u(M)$.

$$\mathrm{div}(v\mathrm{grad}u) = v\mathrm{div}(\mathrm{grad}u) + (\mathrm{grad}v, \mathrm{grad}u) =$$

$$= v\Delta u + (\mathrm{grad}v, \mathrm{grad}u),\ \Delta u = \mathrm{div}(\mathrm{grad}u).$$

Отсюда $v\Delta u = \mathrm{div}(v\mathrm{grad}u) - (\mathrm{grad}v, \mathrm{grad}u)$. Теперь, проинтегрировав по D, получим формулу (3.7). ■

3.2.2. Вторая формула Грина в $D \subset \mathbb{R}^3$

Поменяв местами функции $u(M)$ и $v(M)$, получим

$$\iiint\limits_D u\Delta v dD = \iint\limits_S u\frac{\partial v}{\partial n}dS - \iiint\limits_D (\mathrm{grad}u, \mathrm{grad}v)dD. \qquad (3.8)$$

Вычтем из формулы (3.7) формулу (3.8), тогда получим ***вторую формулу Грина***:

$$\iiint\limits_D (v\Delta u - u\Delta v)dD = \iint\limits_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS, \qquad (3.9)$$

которая симметрична относительно функций $u(M)$ и $v(M)$.

3.2.3. Третья (основная) формула Грина в $D \subset \mathbb{R}^3$

Пусть $u(M)$ — произвольная функция, дважды непрерывно дифференцируемая в ограниченной области D и непрерывная вместе с производными первого порядка в замкнутой области $\overline{D}$: $u \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2\left(D\right)$. Фиксируем точку $M_0 \in D$ и выберем функцию $v(M, M_0) = \dfrac{1}{R_{MM_0}}$, где R_{MM_0} — расстояние от M_0 до M; $v(M, M_0)$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$.

Применим вторую формулу Грина к функциям $u(M)$ и $v(M, M_0)$. Функция $v(M, M_0)$ имеет особенность, когда точка M совпадает с точкой M_0, поэтому применить вторую формулу Грина во всей области D нельзя.

Окружим точку M_0 шаром $K_\varepsilon^{M_0}$ радиуса ε с центром M_0, ограниченным сферой $\Sigma_\varepsilon^{M_0}$. Применим к функциям $u(M)$ и $v(M, M_0)$ вторую формулу Грина в области $D \setminus K_\varepsilon^{M_0}$:

$$\iiint\limits_{D\setminus K_\varepsilon^{M_0}} (u\Delta v - v\Delta u)dD = \iint\limits_S \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS + \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_0}} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS. \qquad (3.10)$$

В интеграле $\iint\limits_S \left(u\dfrac{\partial v}{\partial n} - v\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)dS$ $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S, а в интеграле $\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_0}} \left(u\dfrac{\partial v}{\partial n} - v\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)dS$ $\mathbf{n}$ — внутренняя нормаль к поверхности сферы $\Sigma_\varepsilon^{M_0}$. Учитывая, что $v(P)\big|_{P\in\Sigma_\varepsilon^{M_0}} = \dfrac{1}{\varepsilon}$, $\left.\dfrac{\partial v(P)}{\partial n}\right|_{P\in\Sigma_\varepsilon^{M_0}} = -\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\right)\Big|_{r=\varepsilon} = \dfrac{1}{\varepsilon^2}$, вычислим интеграл по сфере:

$$J = \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_0}} \left(u(P)\frac{\partial v(P, M_0)}{\partial n_P} - v(P, M_0)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}\right)dS_P = \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_0}} \left(u(P)\frac{1}{\varepsilon^2} - \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial u(P)}{\partial n}\right)dS_P.$$

Воспользуемся теоремой о среднем:

$$J = \left(\frac{1}{\varepsilon^2} u\left(P^*\right) - \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u\left(P^{**}\right)}{\partial n} \right) 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi u\left(P^*\right) - 4\pi\varepsilon \frac{\partial u\left(P^{**}\right)}{\partial n},$$

где точки P^* и P^{**} принадлежат сфере $\Sigma_\varepsilon^{M_0}$.

Перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$, тогда сфера $\Sigma_\varepsilon^{M_0}$ и шар $K_\varepsilon^{M_0}$ будут стремиться к точке M_0, значения $u(P^*)$ и $\dfrac{\partial u\left(P^{**}\right)}{\partial n}$ будут стремиться к $u(M_0)$ и $\dfrac{\partial u(M_0)}{\partial n}$. В силу ограниченности $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ и непрерывности функции u имеем $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} J = 4\pi u(M_0)$. В точке M_0 абсолютно сходится несобственный интеграл $\iiint\limits_D \dfrac{1}{R_{MM_0}} \Delta u dD_M$: функция $\Delta u(M)$ в окрестности точки M_0 ограничена, а несобственный интеграл $\iiint\limits_D \dfrac{1}{R_{MM_0}^\alpha} dD_M$ сходится при $\alpha < 3$. Таким образом, формула (3.10) примет вид

$$-\iiint\limits_D \frac{1}{R_{MM_0}} \Delta u dD_M = 4\pi u(M_0) +$$

$$+\iint\limits_S \left(u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{PM_0}} \right) - \frac{1}{R_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \right) dS_P$$

или

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left(\frac{1}{R_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{PM_0}} \right) \right) dS_P -$$

$$-\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_D \frac{\Delta u(M)}{R_{MM_0}} dD_M, \tag{3.11}$$

где M_0 — *внутренняя* точка области D.

Формула (3.11) называется *третьей формулой Грина* или интегральным представлением функции $u(M)$.

Замечание 3.1. Если $M_0 \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$, то точки M и M_0 не могут совпасть. Тогда правая часть формулы (3.11) равна нулю. Если M_0 принадлежит гладкой границе области $\bar{D}$, то вырезать эту точку можно сферическим куполом. В пределе это будет полу-

сфера, поверхность которой равна $2\pi\epsilon^2$. Тогда формулу (3.11) можно переписать так:

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\right)\right)dS_P-$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D\frac{\Delta u(M)}{R_{MM_0}}dD_M=$$

$$=\begin{cases}u(M_0), M_0\in D;\\ 0, M_0\in\mathbb{R}^3\setminus\bar{D};\\ \dfrac{u(M_0)}{2}, M_0\in S,\\ S-\text{гладкая в точке} M_0.\ \blacksquare\end{cases}$$

3.2.4. Формулы Грина в области на плоскости $\left(D\subset\mathbb{R}^2\right)$

Пусть теперь D — ограниченная область на плоскости Oxy, граница S которой является достаточно гладкой кривой. В *интегральной формуле Грина*

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_S Gdy-Hdx$$

выберем

$$G=v(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\quad H=v(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial y},$$

где $u,v\in C^1\left(\bar{D}\right)\cap C^2\left(D\right)$.

Тогда получим *первую формулу Грина*

$$\iint\limits_D v\Delta u dxdy=\oint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n}dl-\iint\limits_D(\text{grad}u,\text{grad}v)dxdy,\qquad(3.12)$$

где $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к кривой S; dl — элемент длины дуги; $dxdy$ — элемент площади.

Меняя ролями в (3.12) u и v, получим *вторую формулу Грина*:

$$\iint\limits_D(v\Delta u-u\Delta v)dxdy=\oint\limits_S\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dl.\qquad(3.13)$$

Точно так же, как в случае трех независимых переменных, выводим из (3.13) *третью* (основную) *формулу Грина*:

$$\frac{1}{2\pi}\oint_S\left(\ln\frac{1}{R_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\ln\frac{1}{R_{PM_0}}\right)\right)dl_P-$$

$$-\frac{1}{2\pi}\iint_D\Delta u(M)\ln\frac{1}{R_{MM_0}}dxdy=\begin{cases}u(M_0),M_0\in D;\\ 0,M_0\in\mathbb{R}^2\setminus\overline{D};\\ \dfrac{u(M_0)}{2},M_0\in S,\\ S-\text{гладкая в точке } M_0.\end{cases}$$

Здесь $M=M(x,\,y)$; $M_0=M_0(x_0,\,y_0)$ — фиксированная точка; R_{MM_0} — расстояние между M_0 и M; $\ln\dfrac{1}{R_{MM_0}}$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа на плоскости; $u\in C^1\left(\overline{D}\right)\cap C^2\left(D\right)$.

3.3. Основные свойства гармонических функций

3.3.1. Свойство гармонической функции

Утверждение 3.1. Если функция $u(M)$ гармоническая в ограниченной области $D\subset\mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей S, то $\iint\limits_S\dfrac{\partial u(P)}{\partial n}dS=0.$

Доказательство. Положим в первой формуле Грина $v(M)\equiv 1$, тогда получим

$$\iint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n}dS=\iiint\limits_D v\Delta u dD+\iiint\limits_D(\text{grad}v,\text{grad}u)dD=0,$$

так как $\Delta u=0$ и $\text{grad}v=0$. ■

Из доказанного свойства следует *необходимое условие существования решения* внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа: решение задачи

$$\Delta u(M)=0,M\in D,\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{P\in S}=\nu(P)$$

может существовать только если $\iint\limits_S \nu(P)dS = 0$. Условие разрешимости аналогичной задачи для уравнения Пуассона

$$\Delta u(M) = -f(M), M \in D, \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{P \in S} = \nu(P)$$

выглядит так:

$$\iiint\limits_D f(M)dD + \iint\limits_S \nu(P)dS = 0.$$

Это условие также вытекает из первой формулы Грина, если положить $v(M) \equiv 1$. Физический смысл последнего условия состоит в том, что стационарный поток теплоты (несжимаемой жидкости, напряженности электрического поля и т. п.) через замкнутую поверхность S равен суммарной величине всех источников (зарядов и т. п.), находящихся внутри S.

Аналогичное необходимое условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Лапласа имеет место и для плоской области D, ограниченной кривой S: $\int\limits_S \nu(P)dl = 0$.

3.3.2. Формула среднего значения

Утверждение 3.2. Если $u(M)$ — гармоническая функция в области $D \subset \mathbb{R}^3$, то для любой точки $M \in D$ имеет место представление $u(M) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{\Sigma_a^M} u(P)dS_P$, где Σ_a^M — сфера радиуса a с центром в точке M, целиком лежащая в D.

Доказательство. Применим третью формулу Грина к шару K_a^M с поверхностью Σ_a^M :

$$u(M) = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma_a^M} \left(u(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{PM}}\right) - \frac{1}{R_{PM}} \frac{\partial u(P)}{\partial n} \right) dS_P.$$

Так как $\left.\frac{1}{R_{PM}}\right|_{P \in \Sigma_a^M} = \frac{1}{a}$, $\left.\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{PM}}\right)\right|_{P \in \Sigma_a^M} = -\frac{1}{a^2}$, учитывая $\iint\limits_{\Sigma_a^M} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$, получим

$$u(M)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{\Sigma_a^M} u(P)dS_P. \ \blacksquare$$

В случае гармонической функции двух переменных $u(M)=$

$=\dfrac{1}{2\pi a}\displaystyle\int\limits_{L_a^M} u(P)dl_P$, где L_a^M — окружность радиуса a с центром в точке M, целиком лежащая в области гармоничности функции $u(M)$.

3.3.3. Бесконечная дифференцируемость

Утверждение 3.3. Гармоническая функция бесконечно дифференцируема.

Доказательство этого свойства следует из третьей формулы Грина. При $M \in D$ поверхностные интегралы являются собственными и их можно дифференцировать по координатам точки M любое число раз. ■

Замечание 3.2. Гармоническая функция во всех внутренних точках D аналитична, т. е. в окрестности любой точки $M \in D$ разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся степенной ряд. При этом радиус сходимости ряда не меньше, чем расстояние до границы S. ■

3.3.4. Принцип максимума (минимума) гармонической функции

Теорема 3.2. Пусть D — ограниченная область с достаточно гладкой границей S. Пусть функция $u(M)$ гармоническая в D и непрерывна в области $\bar{D}$. Тогда она достигает своего максимального и минимального значений на границе области $\bar{D}$, т. е. $\max\limits_{M\in\bar{D}} u(M)=\max\limits_{M\in S} u(M)$, $\min\limits_{M\in\bar{D}} u(M)=\min\limits_{M\in S} u(M)$.

Доказательство. По теореме Вейерштрасса функция $u(M)$, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве $\bar{D}\subset\mathbb{R}^3$, достигает своего максимального значения. Обозначим $A=\max\limits_{M\in\bar{D}} u(M)$ и предположим, что это значение достигается в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)\in D$, внутри области D. Рассмотрим

сферу $\Sigma_a^{M_0}$ радиуса a с центром в точке M_0, целиком лежащую в D. Для этой сферы напишем формулу среднего значения:

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{\Sigma_a^{M_0}} u(P)dS_P \le \frac{1}{4\pi a^2}\iint\limits_{\Sigma_a^{M_0}} u(M_0)dS_P = u(M_0).$$

Таким образом, возможно только равенство. Это значит, что в каждой точке сферы $\Sigma_a^{M_0}$ значение функции $u(M)$ равно A, в противном случае равенство в формуле не будет выполняться.

Теперь рассмотрим сферу $\Sigma_{a_1}^{M_1}$ с центром в точке $M_1 \in \Sigma_a^{M_0}$ радиуса a_1, целиком лежащую в области D. Аналогично предыдущему покажем, что $u(M)\big|_{M\in\Sigma_{a_1}^{M_1}} = u(M_1) = u(M_0) = A$. Можно построить такую последовательность сфер $\Sigma_{a_n}^{M_n}$ с центрами в точках $M_n \in D$ радиусов a_n, целиком лежащих в D, что последовательность точек $\{M_n\}$ будет сходиться к точке $\bar{M} \in S$. В силу нашего построения $u(M_n) = u(M_0) = A$ для любого n. Так как функция $u(M)$ непрерывна в $\bar{D}$, последовательность $\{u(M_n)\}$ будет сходиться к $u\left(\bar{M}\right)$, откуда следует, что $u\left(\bar{M}\right) = A$.

Для доказательства утверждения о минимальном значении гармонической функции вместо функции $u(M)$ надо рассмотреть функцию $v(M) = -u(M)$.

В случае $D \subset \mathbb{R}^2$ меняется только вид формулы среднего значения. ■

Замечание 3.3. Фактически доказано более сильное утверждение: функция $u(M)$, гармоническая в D и непрерывная в $\bar{D}$, принимающая максимальное (или минимальное) значение в D, является постоянной. ■

Следствие 3.1. Если две гармонические функции $u(M)$ и $v(M)$ непрерывны в области $\bar{D}$ и $u(M)\big|_{M\in S} \le v(M)\big|_{M\in S}$, то всюду в D $u(M) \le v(M)$.

Доказательство. Гармоническая функция $w(M) = v(M) - u(M)$ будет непрерывной в $\bar{D}$ и $w(M)\big|_{M\in S} \ge 0$. В силу принципа минимального значения $w(M) \ge 0$ всюду в D. ■

Из принципа максимума следует *устойчивость* решения внутренней задачи Дирихле. Рассмотрим две задачи Дирихле:

$$\Delta u_i(M) = 0,\ M \in D,$$

$$u_i(P)\big|_{P\in S} = \mu_i(P),\ i = 1,\ 2.$$

Введем расстояния между функциями:

$$\rho(\mu_1, \mu_2) = \|\mu_1 - \mu_2\|_{C(S)} = \max_{P \in S} |\mu_1(P) - \mu_2(P)|,$$

$$\rho(u_1, u_2) = \|u_1 - u_2\|_{C(\bar{D})} = \max_{M \in \bar{D}} |u_1(M) - u_2(M)|.$$

Определение 3.2. Решение задачи Дирихле называется ***устойчивым***, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $\rho(\mu_1, \mu_2) < \delta(\varepsilon)$ следует $\rho(u_1, u_2) < \varepsilon$.

Теорема 3.3. Для внутренней задачи Дирихле, если $\rho(\mu_1, \mu_2) \leq \leq \varepsilon$, то $\rho(u_1, u_2) \leq \varepsilon$.

Доказательство. Заметим, что функция $u(M) \equiv \varepsilon$ гармоническая и всюду положительна. Рассмотрим функцию $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$. Из принципа максимума следует, что если на границе области $|v\|_{P \in S} \leq \varepsilon$, то $|v(M)| \leq \varepsilon$ всюду в $\bar{D}$. ■

3.4. Единственность классических решений внутренних краевых задач для уравнения Лапласа

3.4.1. Единственность решения внутренней задачи Дирихле

Теорема 3.4. Задача Дирихле для уравнения Лапласа не может иметь более одного классического решения.

Доказательство. Допустим, что существуют два решения задачи Дирихле $u_1(M)$ и $u_2(M)$. Введем функцию $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$. Тогда $v(M)$ будет удовлетворять условиям

$$v \in C(\bar{D}); \Delta v(M) = 0, M \in D; v(P)\big|_{P \in S} = 0.$$

Функция $v(M)$ является решением задачи Дирихле с однородными краевыми условиями. По теореме Вейерштрасса любая непрерывная функция в замкнутой ограниченной области достигает своего максимального и минимального значений. Если $v(M) > 0$ хотя бы в одной точке области D, то она достигает своего максимального значения внутри области D, но это невоз-

можно в силу принципа максимума, так как $v(M)\big|_{M\in S}=0$. Аналогично доказывается, что $v(M)$ не может быть меньше нуля внутри D. Следовательно, $v(M)\equiv 0$. ■

Замечание 3.4. Единственность решения задачи Дирихле в ограниченной области $D\subset\mathbb{R}^2$ сохраняется и в более общей постановке, допускающей *кусочно-непрерывные функции* $\mu(P)$ в краевом условии: на кривой S возможны только точки разрыва первого рода $\mu(P)$. В такой задаче требуется найти функцию $u(M)$, гармоническую в D и непрерывно примыкающую к заданной на S функции $\mu(P)$ в точках ее непрерывности. Для обеспечения единственности решения требуется его *ограниченность* в окрестностях точек разрыва. ■

3.4.2. Характер единственности решения внутренней задачи Неймана

Как отмечалось, решение внутренней задачи Неймана для уравнения Лапласа не может быть единственным, поскольку в условие этой задачи входят только производные искомой функции. Но имеет место единственность решения с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

Теорема 3.5. Классическое решение внутренней задачи Неймана определяется с точностью до произвольной постоянной: если $u_1(M)$ и $u_2(M)$ — решения одной и той же задачи Неймана, то $u_1(M)-u_2(M)=\text{const}$.

Доказательство. Здесь нельзя воспользоваться принципом максимума, так как неизвестно чему равны значения функции $u(M)$ на границе. Поэтому используем формулы Грина.

Допустим, что существуют две функции $u_1(M)$ и $u_2(M)$, являющиеся решениями задачи Неймана в ограниченной области $D\subset\mathbb{R}^3$. Рассмотрим функцию $v(M)=u_1(M)-u_2(M)$. Эта функция $v(M)\in C^1\left(\overline{D}\right)\cap C^2(D)$. Она удовлетворяет задаче

$$\Delta v(M)=0, M\in D; \frac{\partial v(P)}{\partial n}=0, P\in S.$$

Очевидно, решением этой задачи является $v(M)=\text{const}$. Докажем, что других решений нет. Применим первую формулу Грина к функции $v(M)$:

$$\iiint_D v\Delta v dD = \iint_S v\frac{\partial v}{\partial n}dS - \iiint_D (\mathrm{grad}v, \mathrm{grad}v)dD.$$

Учитывая, что $\Delta v(M) = 0$, $M \in S$, и $\left.\frac{\partial v(P)}{\partial n}\right|_{P\in S} = 0$, получим

$\iiint_D (\mathrm{grad}v, \mathrm{grad}v)dD = 0$, поэтому $(\mathrm{grad}v, \mathrm{grad}v) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 = 0$. Так как сумма неотрицательных слагаемых равна нулю, то $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$ всюду в области D. Отсюда получаем $v(M) = \mathrm{const}$.

Аналогично доказывается утверждение теоремы для ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$. ■

3.4.3. Единственность решения третьей внутренней краевой задачи

Теорема 3.6. Если функция $h(P)$ неотрицательна всюду на S, не равна тождественно нулю и непрерывна на S, то внутренняя третья краевая задача не может иметь более одного классического решения.

Условие $h(P) \geq 0$, $P \in S$, существенно для единственности решения задачи.

Пример 3.1. Если $h(P) < 0$, $P \in S$, то на плоскости Oxy можно построить задачу, которая имеет более одного решения. Рассмотрим круг радиуса a (область $D \subset \mathbb{R}^2$ с границей S). Надо найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую условиям

$$\Delta u(M) = 0,\ M \in D;\ \frac{\partial u(P)}{\partial n} + h(P)u(P) = 0,\ P \in S.$$

Возьмем две функции $u_1 \equiv 0$ и $u_2 = x$ и подберем $h(P)$ таким образом, чтобы обе они были решениями этой задачи. Запишем задачу в полярной системе координат. Тогда получим $x = r\cos\varphi$, $u_2 = r\cos\varphi$ и $\frac{\partial u_2}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial r} = \cos\varphi$ (нормаль $\mathbf{n}$ к границе S совпадает с направлением радиуса). Если $h = -\frac{1}{a}$, то условие

$\dfrac{\partial u(P)}{\partial n} + h(P)u(P) = 0,\ P \in S$, превратится в тождество как для функции u_1, так и для функции u_2. Следовательно, из-за выбора $h < 0$ мы построили два решения третьей краевой задачи. ■

Доказательство теоремы 3.6. Допустим, что существуют две функции $u_1(M)$ и $u_2(M)$, являющиеся классическими решениями третьей краевой задачи в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$. Введем функцию $v(M) = u_1(M) - u_2(M)$. Эта функция удовлетворяет задаче

$$\Delta u(M) = 0,\ M \in D;\ \frac{\partial v(P)}{\partial n} + h(P)v(P) = 0, P \in S.$$

Применим первую формулу Грина к функции $v(M)$:

$$\iiint\limits_D v\Delta v dD = \iint\limits_S v\frac{\partial v}{\partial n}dS - \iiint\limits_D (\mathrm{grad}v, \mathrm{grad}v)dD.$$

Учитывая, что $\Delta v(M) = 0$, $M \in D$, и $\dfrac{\partial v(P)}{\partial n} + h(P)v(P) = 0$, $P \in S$, получим

$$\iint\limits_S h(P)v^2(P)dS + \iiint\limits_D (\mathrm{grad}v, \mathrm{grad}v)dD = 0.$$

По условию теоремы $h(P) \geq 0$, поэтому из неотрицательности обоих слагаемых получаем $\iint\limits_S h(P)v^2(P)dS = 0$, $\iiint\limits_D (\mathrm{grad}v, \mathrm{grad}v)dD = 0$. Отсюда $(\mathrm{grad}v,\ \mathrm{grad}v) = 0$, поэтому $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial z} \equiv 0$ в D и $v \equiv \mathrm{const}$ в D. Из непрерывности функции $v(M)$ в $\bar{D}$ получаем $v \equiv \mathrm{const}$ на S. Но тогда из равенства $\iint\limits_S h(P)v^2(P)dS = 0$ и условий $h \geq 0$ и h не равно тождественно нулю следует $v \equiv 0$ в $\bar{D}$.

Аналогично доказывается утверждение теоремы для ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$. ■

Замечание 3.5. Доказанные теоремы единственности решений внутренних краевых задач справедливы и в случае уравнения

Пуассона $\Delta u = -f$: если имеются два решения краевой задачи, то их разность удовлетворяет уравнению Лапласа и нулевому краевому условию заданного в задаче типа. ■

3.5. Регулярность гармонических функций на бесконечности. Формулы Грина в неограниченной области, внешней к ограниченной

3.5.1. Регулярные на бесконечности функции трех переменных

Рассмотрим сначала случай трех переменных. Пусть $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ в системе координат $Oxyz$.

Определение 3.3. Функция $u(M)$, $M \in \mathbb{R}^3$, называется ***регулярной на бесконечности***, если при всех достаточно больших r выполнены неравенства

$$|u| \le \frac{A}{r}, \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \le \frac{A}{r^2}, \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \le \frac{A}{r^2}, \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \le \frac{A}{r^2}, A = \text{const}.$$

Рассмотрим ограниченную область $D \subset \mathbb{R}^3$, границей которой является замкнутая поверхность S. Обозначим через D' область, являющуюся внешней к S, тогда $\mathbb{R}^3 = D \cup S \cup D'$, $\overline{D}' = D' \cup S$.

Теорема 3.7. Пусть функции $u(M)$ и $v(M)$ регулярны на бесконечности и $u, v \in C^2\left(D'\right) \cap C^1\left(\overline{D}'\right)$. Тогда для $u(M)$ и $v(M)$ имеет место первая формула Грина:

$$\iiint\limits_{D'} u \Delta v dD = \iint\limits_{S} u \frac{\partial v}{\partial n} dS - \iiint\limits_{D'} (\text{grad}\, u, \text{grad}\, v) dD. \quad (3.14)$$

Доказательство. Область D ограничена, поэтому можно выбрать шар K_r достаточно большого радиуса r с центром в начале координат, внутри которого находится D. Пусть S_r — граница этого шара; D'_r — слой пространства между поверхностью S и сферой S_r. Область D'_r ограничена, поэтому в ней справедлива первая формула Грина для функций $u(M)$ и $v(M)$:

$$\iiint\limits_{D'_r} u\Delta v dD = \iint\limits_{S} u\frac{\partial v}{\partial n}dS + \iint\limits_{S_r} u\frac{\partial v}{\partial n}dS -$$

$$-\iiint\limits_{D'_r} (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)dD, \tag{3.15}$$

где $\mathbf{n}$ является внешней нормалью к границе области D'_r (она направлена внутрь области D на S и вне шара K_r на S_r).

Пусть в каждой точке P сферы S_r вектор нормали $\mathbf{n}_P$ задан косинусами его углов с осями Ox, Oy, Oz: $\mathbf{n}_P = \{\cos\alpha_P, \cos\beta_P, \cos\gamma_P\}$, $|\mathbf{n}_P| = 1$. Напомним, что $\dfrac{\partial v(P)}{\partial n_P} = \big(\operatorname{grad} v(P), \mathbf{n}_P\big)$. Учитывая регулярность функций u и v, оценим при достаточно больших r интеграл по сфере S_r:

$$\left|\iint\limits_{S_r} u\frac{\partial v}{\partial n}dS\right| = \left|\iint\limits_{S_r} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\alpha_P + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\beta_P + \frac{\partial v}{\partial z}\cos\gamma_P\right)dS_P\right| \le$$

$$\le \iint\limits_{S_r} |u|\left(\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right||\cos\alpha| + \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right||\cos\beta| + \left|\frac{\partial v}{\partial z}\right||\cos\gamma|\right)dS \le$$

$$\le \iint\limits_{S_r} \frac{A}{r}\left(\frac{A}{r^2} + \frac{A}{r^2} + \frac{A}{r^2}\right)dS = \iint\limits_{S_r} \frac{3A^2}{r^3}dS = \frac{3A^2}{r^3}4\pi r^2 = \frac{12A^2\pi}{r}.$$

Отсюда $\lim\limits_{r\to+\infty} \iint\limits_{S_r} u\dfrac{\partial v}{\partial n}dS = 0.$

Покажем, что существует конечный предел

$$\lim_{r\to+\infty} \iiint\limits_{D'_r} (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)dD = \iiint\limits_{D'} (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)dD \tag{3.16}$$

— несобственный интеграл первого рода. Действительно, для регулярных функций u и v при достаточно больших r имеем

$$\big|(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)\big| = \left|\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right| \le$$

$$\le \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|\left|\frac{\partial v}{\partial z}\right| \le \frac{3A^2}{r^4}.$$

Поэтому при $r \to +\infty$ подынтегральное выражение в (3.16) является величиной $O\left(\dfrac{1}{r^4}\right)$.

По признаку сравнения несобственный интеграл (3.16) сходится абсолютно (поскольку $4 > \dim \mathbb{R}^3 = 3$).

Итак, при $r \to +\infty$ существует предел правой части формулы (3.15), поэтому существует и предел ее левой части. ■

Поменяв местами функции u и v в соотношении (3.14) и вычитая из одного соотношения другое, получим вторую формулу Грина:

$$\iiint\limits_{D'} (u\Delta v - v\Delta u)dD = \iint\limits_{S} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS.$$

Учитывая, что фундаментальное решение $\dfrac{1}{R_{MM_0}}$ уравнения Лапласа регулярно на бесконечности, получим третью (основную) формулу Грина для функции $u(M)$ в области D'. При этом нормаль к поверхности S должна выбираться внешней по отношению к D', т.е. направлена внутрь D:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S}\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{PM_0}}\right)\right)dS_P -$$

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D'}\frac{\Delta u(M)}{R_{MM_0}}dD_M.$$

Теорема 3.8. Гармоническая в области $D' \subset \mathbb{R}^3$ функция, равномерно стремящаяся к нулю на бесконечности, является регулярной на бесконечности.

Доказательство теоремы основано на преобразовании Кельвина гармонической функции $u(M)$.

Обозначим через K_a открытый шар радиуса a с центром в начале координат O, а через S_a — его границу. Открытая область K'_a — внешность шара: $\mathbb{R}^3 = K_a \cup S_a \cup K'_a$. Пусть $\mathbf{R}_{OM}$ — радиус-вектор, проведенный из точки O в точку $M \in K'_a$; $|\mathbf{R}_{OM}| = R_{OM}$. Точки $M \in K'_a$ и $N \in K_a$ называются *симметричными относительно сферы* S_a, если

$$\mathbf{R}_{ON} = \frac{a^2}{R_{OM}^2}\mathbf{R}_{OM},\ \mathbf{R}_{OM} = \frac{a^2}{R_{ON}^2}\mathbf{R}_{ON}. \tag{3.17}$$

Такие точки лежат на одном луче, выходящем из O, и удовлетворяют соотношению $R_{OM}R_{ON} = a^2$. Преобразование (3.17) называется ***инверсией***; оно взаимно однозначно отображает K'_a на $K_a \setminus O$.

Пусть функция $u(M)$ гармонична в K'_a.

Функция $v(N)=\dfrac{a}{R_{ON}}u(M)$ называется ***преобразованием Кельвина*** функции $u(M)$, если M и N симметричны относительно S_a. Можно доказать, что $v(N)$ гармонична в $K_a \setminus O$. Для этого запишем координаты точек M и N в сферических координатах:

$M = M(r, \theta, \varphi)$; $N = N(\rho, \theta, \varphi)$; $\rho = \dfrac{a^2}{r}$. Тогда

$$u(M) = u(r, \theta, \varphi),$$

$$v(N) = v(\rho, \theta, \varphi) = \frac{a}{\rho} u\left(\frac{a^2}{\rho}, \theta, \varphi\right),$$

$$\Delta_{\rho,\theta,\varphi} v(N) = \Delta_{\rho,\theta,\varphi}\left(\frac{a}{\rho} u\left(\frac{a^2}{\rho}, \theta, \varphi\right)\right) = \frac{r^5}{a^5}\Delta_{r,\theta,\varphi} u(M) \text{ (проверьте!).}$$

Если $u(M)$ гармонична в K'_a и $u(M)$ при $M \to \infty$ равномерно стремится к нулю, то гармоническая в $K_a \setminus O$ функция $v(N)$ при $\rho \to 0$ удовлетворяет условию $v(N) = \dfrac{a}{\rho} u(M) = o\left(\dfrac{1}{\rho}\right)$, т. е. в точке O функция v может иметь особенность лишь меньшего порядка, чем фундаментальное решение уравнения Лапласа. Поэтому никакой особенности в точке O у функции v нет, она гармонична всюду в шаре K_a. Следовательно, в окрестности точки O функция v ограничена и имеет ограниченные первые производные.

Выполняя обратное преобразование Кельвина, получим $u(M) = \dfrac{a}{r} v(N) = \dfrac{a}{r} u\left(\dfrac{a^2}{r}, \theta, \varphi\right)$. Отсюда при достаточно больших r следует неравенство $|u| \le \dfrac{\text{const}}{r}$. А вычисляя $\operatorname{grad} u(M)$, при достаточно больших r получим $|\operatorname{grad} u| \le \dfrac{\text{const}}{r^2}$.

В самом деле, если $M = M(x_M, y_M, z_M)$, $N = N(x_N, y_N, z_N)$ в декартовой системе координат с центром O, то

$$\frac{x_N}{x_M} = \frac{y_N}{y_M} = \frac{z_N}{z_M} = \frac{\rho}{r} = \frac{a^2}{r^2} = \frac{a^2}{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x_M} = \frac{\partial}{\partial x_M}\left(\frac{a}{r}v(N)\right) = -\frac{ax_M v(N)}{r^3} +$$

$$+\frac{a}{r}\left(\frac{\partial v(N)}{\partial x_N}\frac{\partial x_N}{\partial x_M} + \frac{\partial v(N)}{\partial y_N}\frac{\partial y_N}{\partial x_M} + \frac{\partial v(N)}{\partial z_N}\frac{\partial z_N}{\partial x_M}\right).$$

Учитывая ограниченность функции $v(N)$ и ее первых производных в окрестности точки O, получим

$$\frac{ax_M v(N)}{r^3} = O\left(\frac{1}{r^2}\right),\ \frac{\partial x_N}{\partial x_M} = \frac{a^2\left(-x_M^2 + y_M^2 + z_M^2\right)}{r^4} = O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial y_N}{\partial x_M} = -\frac{2a^2 x_M y_M}{\left(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2\right)^2} = O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

$$\frac{\partial z_N}{\partial x_M} = -\frac{2a^2 x_M z_M}{\left(x_M^2 + y_M^2 + z_M^2\right)^2} = O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

откуда $\dfrac{\partial u(M)}{\partial x_M} = O\left(\dfrac{1}{r^2}\right)$ при достаточно больших r. Аналогичные оценки справедливы для $\dfrac{\partial u(M)}{\partial y_M}$, $\dfrac{\partial u(M)}{\partial z_M}$. ■

Замечание 3.6. В доказательстве использована теорема об устранении в точке O особенности гармонической функции [13, гл. 4, § 3]. ■

3.5.2. Регулярные на бесконечности функции двух переменных

В случае двух переменных будем рассматривать аналогичные по смыслу D, S, D' в $\mathbb{R}^2$. Пусть $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ в Oxy.

Определение 3.4. Функция двух переменных $u(x, y)$ называется ***регулярной на бесконечности***, если она имеет конечный предел на бесконечности.

Теорема 3.9. Для *гармонической* в D' функции $u(x, y)$, регулярной на бесконечности, при достаточно больших значениях r справедливы неравенства

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \le \frac{A}{r^2}, \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \le \frac{A}{r^2}, A = \text{const}.$$

Доказательство основано на преобразовании Кельвина гармонической функции $u(M)$, $M \in \mathbb{R}^2$. Пусть K_a — открытый круг радиуса a с центром в начале координат O; S_a — его граница; K'_a — внешность круга и пусть функция $u(M)$ гармонична в K'_a. Функция $v(N) = u(M)$ называется преобразованием Кельвина функции $u(M)$, если M и N симметричны относительно окружности S_a: $R_{OM}R_{ON} = a^2$, M и N лежат на одном луче, выходящем из O. Можно доказать, что $v(N)$ гармонична в $K_a \setminus O$. Для этого запишем координаты точек M и N в полярных координатах: $M = M(r, \varphi)$, $N = N(\rho, \varphi)$, $\rho = \dfrac{a^2}{r}$. Тогда $u(M) = u(r, \varphi)$,

$$v(N) = v(\rho, \varphi) = u\left(\frac{a^2}{\rho}, \varphi\right).$$

Справедливо следующее соотношение:

$$\Delta_{\rho,\varphi} v(N) = \Delta_{\rho,\varphi} u\left(\frac{a^2}{\rho}, \varphi\right) = \frac{r^4}{a^4} \Delta_{r,\varphi} u(M) \text{ (проверьте!)}.$$

Если $u(M)$ гармонична и ограничена в K'_a, то у функции $v(N)$ в точке O нет особенности, она гармонична всюду в круге K_a. Поэтому в окрестности точки O функция v ограничена и имеет ограниченные первые производные.

Выполняя обратное преобразование Кельвина, получим $u(M) = v\left(\dfrac{a^2}{r}, \varphi\right)$. Если $M = M(x_M, y_M)$, $N = N(x_N, y_N)$ в декартовой системе координат с центром O, то $\dfrac{x_N}{x_M} = \dfrac{y_N}{y_M} = \dfrac{\rho}{r} = \dfrac{a^2}{r^2} = \dfrac{a^2}{x_M^2 + y_M^2}$. Поэтому

$$\frac{\partial u(M)}{\partial x_M} = \frac{\partial v(N)}{\partial x_M} = \frac{\partial v(N)}{\partial x_N}\frac{\partial x_N}{\partial x_M} + \frac{\partial v(N)}{\partial y_N}\frac{\partial y_N}{\partial x_M},$$

$$\frac{\partial x_N}{\partial x_M} = \frac{a^2\left(y_M^2 - x_M^2\right)}{r^4} = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad \frac{\partial y_N}{\partial x_M} = -\frac{2a^2 x_M y_M}{r^4} = O\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Из ограниченности первых производных функции $v(N)$ в окрестности точки O получаем $\dfrac{\partial u(M)}{\partial x_M} = O\left(\dfrac{1}{r^2}\right)$. Аналогичная оценка справедлива для $\dfrac{\partial u(M)}{\partial y_M}$. ■

Теорема 3.10. Для функций двух переменных, ***гармонических*** в D' и регулярных на бесконечности, справедливы формулы Грина.

Доказательство проводится аналогично доказательству в пространственном случае. ■

Чтобы внешняя краевая задача для уравнения Лапласа имела единственное решение, требуют его регулярности на бесконечности.

3.6. Внешние краевые задачи для уравнения Лапласа. Единственность их классических решений

Фундаментальные решения уравнения Лапласа различны в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$. Поэтому и условия, гарантирующие единственность решений внешних краевых задач для уравнения Лапласа, различны в $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$.

3.6.1. Внешняя задача Дирихле в пространстве $\left(D' \subset \mathbb{R}^3\right)$

Постановка задачи о нахождении *классического решения*: найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в неограниченной области D', непрерывную в замкнутой области $\overline{D}' = D' \cup S$, принимающую на границе заданные значения $u(P) = \mu(P)$, $P \in S$, и *равномерно стремящуюся к нулю на бесконечности* (здесь $D' = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$, D — ограниченная область с границей S). Классическое решение $u(M) \in C\left(\overline{D}'\right) \cap C^2\left(D'\right)$, а задающая его функция в краевом условии $\mu(P) \in C(S)$.

Замечание 3.7. Условие равномерного стремления к нулю функции $u(M)$ на бесконечности требуется для единственности решения задачи. ■

Пример 3.2. Рассмотрим центрально-симметричную задачу $\Delta u(r) = 0$, $r > a$, $u(r = a) = 1$. Функция $u(r)$ вне шара радиуса a удовлетворяет уравнению Лапласа, а на границе принимает заданное значение $u(r = a) = 1$. Тогда функции $u_1(r) \equiv 1$ и $u_2(r) = a/r$ удовлетворяют уравнению Лапласа вне шара и краевому условию.

Получили два решения поставленной задачи. Если учесть условие на бесконечности, то функция $u_1(r) = 1$ не подходит. Из двух решений $u_1(r) = 1$ и $u_2(r) = a/r$ можно построить семейство решений

$u(r) = \alpha u_1(r) + \beta u_2(r)$, $\alpha + \beta = 1$, которое будет удовлетворять поставленной задаче. Условие $\lim\limits_{r\to\infty} u(r) = 0$ позволяет выделить единственное решение внешней задачи Дирихле. ■

Теорема 3.11. Внешняя задача Дирихле в пространстве $\mathbb{R}^3$ может иметь только одно решение.

Доказательство этой теоремы основано на применении принципа максимума в области, ограниченной поверхностью S и сферой S_r достаточно большого радиуса r. Пусть существуют два решения $u_1(M)$ и $u_2(M)$ задачи

$\Delta u(M) = 0$, $M \in D'$, $u(P) = \mu(P)$, $P \in S$; $u(M)$ при $M \to \infty$ равномерно стремится к нулю.

Введем функцию $w(M) = u_1(M) - u_2(M)$. Для $w(M)$ получим задачу

$\Delta w(M) = 0$, $M \in D'$, $w(P) = 0$, $P \in S$; $w(M)$ при $M \to \infty$ равномерно стремится к нулю.

Предположим, что в области D' существует точка M_1, в которой $w(M_1) \neq 0$ ($u_1(M_1) \neq u_2(M_1)$). Выберем шар большого радиуса r с границей S_r так, чтобы точка M_1 лежала между поверхностями S и S_r, и на поверхности S_r выполнялось неравенство $|w(M)| < \varepsilon$ для произвольно малого $\varepsilon > 0$. В замкнутой области, ограниченной поверхностями S и S_r, получаем гармоническую функцию $w(M)$; $w(M_1) \neq 0$ и $w(M)\big|_{M\in S} = 0$, $\big|w(M)\big\|_{M\in S_r} < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. В силу принципа максимума $\big|w(M_1)\big| < \varepsilon$. В силу произвольности выбора числа $\varepsilon > 0$ $w(M_1) = 0$, поэтому $u_1(M) = u_2(M)$ в области D'. ■

3.6.2. Внешняя задача Неймана в пространстве $\left(D' \subset \mathbb{R}^3\right)$

Постановка задачи о нахождении *классического решения*: найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в неограниченной области D', удовлетворяющую условию $\dfrac{\partial u(P)}{\partial n} = \nu(P), P \in S,$ и *равномерно стремящуюся к нулю на бес-*

конечности (здесь $D' = \mathbb{R}^3 \setminus D$, D — ограниченная область с границей S). Классическое решение $u(M) \in C^1\left(\overline{D}'\right) \cap C^2\left(D'\right)$, а задающая его функция $\nu(P) \in C(S)$.

Требование регулярности искомой функции на бесконечности гарантирует единственность решения поставленной задачи.

Теорема 3.12. Внешняя задача Неймана в $\mathbb{R}^3$ имеет единственное классическое решение.

Доказательство теоремы основано на применении первой формулы Грина в неограниченной области D'.

Пусть в D' существуют два классических решения внешней задачи Неймана: $u_1(M)$ и $u_2(M)$. Тогда функция $w(M) = u_1(M) - u_2(M)$ удовлетворяет задаче $\Delta w(M) = 0$, $M \in D'$; $\dfrac{\partial w(P)}{\partial n} = 0$, $P \in S$; $w(M)$ при $M \to \infty$ равномерно стремится к нулю; $w(M) \in C^1\left(\overline{D}'\right) \cap C^2\left(D'\right)$. Поэтому к функции $w(M)$ можно применить первую формулу Грина:

$$\iiint_{D'} w(M)\Delta w(M)\,dD_M = \iint_S w(P)\frac{\partial w(P)}{\partial n_P}\,dS_P - \iiint_{D'} (\operatorname{grad} w, \operatorname{grad} w)\,dD_M. \quad (3.18)$$

Отсюда $\operatorname{grad} w \equiv \mathbf{0}$ в D', т. е. $w(M) \equiv \text{const}$ в $\overline{D}'$. Но $w(M)$ при $M \to \infty$ равномерно стремится к нулю, поэтому $w(M) \equiv 0$ в $\overline{D}'$. ■

Замечание 3.8. Решение внешней задачи Неймана в $\mathbb{R}^3$, регулярное на бесконечности, существует для любой функции $\nu \in C(S)$. Требование $\iint_S \nu(P)\,dS_P = 0$ излишне. ■

3.6.3. Внешняя третья краевая задача в пространстве $\left(D' \subset \mathbb{R}^3\right)$

Постановка задачи о нахождении *классического решения*: найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в неограниченной области D', удовлетворяющую условию $\dfrac{\partial u(P)}{\partial n} + h(P)u(P) = \eta(P)$ при $P \in S$, где $\eta(P) \in C(S)$; $h(P) \geq 0$;

$h(P) \in C(S)$ ($h(P)$ не равна тождественно нулю) и *равномерно стремящуюся к нулю на бесконечности* (здесь $D' = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$; D — ограниченная область с границей S). Классическое решение $u(M) \in C^1(\bar{D}') \cap C^2(D')$.

Требование регулярности искомой функции на бесконечности позволяет применить первую формулу Грина в неограниченной области D' и доказать единственность решения поставленной задачи.

Теорема 3.13. Если функция $h(P) \geq 0$ и не равна тождественно нулю на границе области, то внешняя третья краевая задача имеет единственное классическое решение.

Доказательство. Пусть в D' существуют два классических решения внешней третьей краевой задачи: $u_1(M)$ и $u_2(M)$. Тогда функция $w(M) = u_1(M) - u_2(M)$ удовлетворяет задаче $\Delta w(M) = 0$, $M \in D'$; $\dfrac{\partial w(P)}{\partial n} + h(P)w(P) = 0, P \in S$; $w(M)$ при $M \to \infty$ равномерно стремится к нулю; $w(M) \in C^1(\bar{D}') \cap C^2(D')$. Поэтому, как и в случае внешней задачи Неймана, к функции $w(M)$ можно применить первую формулу Грина (3.18), откуда следует

$$\iint_S h(P)w^2(P)dS_P + \iiint_{D'} (\mathrm{grad}w, \mathrm{grad}w)dD_M = 0. \quad (3.19)$$

Поскольку $h(P) \geq 0$, каждый из интегралов в (3.19) неотрицателен. Из (3.19) следует $\mathrm{grad}w = \mathbf{0}$ в D', т. е. $w(M) \equiv \mathrm{const}$ в $\bar{D}'$. Но $w(M)$ при $M \to \infty$ равномерно стремится к нулю, поэтому $w(M) \equiv 0$ в $\bar{D}'$. ■

3.6.4. Внешняя задача Дирихле на плоскости $(D' \subset \mathbb{R}^2)$

Для уравнения Лапласа *на плоскости* требование равномерного стремления решения к нулю на бесконечности является жестким, такого решения может не существовать.

Пример 3.3. В полярных координатах (r, φ) на плоскости рассмотрим центрально-симметричную задачу Дирихле вне круга радиуса $a \neq 1$:

$$\Delta u(r) = 0,\ r > a;\ u(r = a) = 1.$$

Можно построить два решения этой задачи: $u_1(r) \equiv 1$ и $u_2(r) = \dfrac{\ln r}{\ln a}$. Других линейно независимых решений у этой задачи нет, поскольку общее решение уравнения $\Delta u(r) = 0$ имеет вид $u(r) = C_1 + C_2 \ln r$. Если потребовать, чтобы функция $u(r)$ равномерно стремилась к нулю на бесконечности, то ни одно из этих решений не подходит, задача не имеет решений. Условие равномерного стремления к нулю на бесконечности нужно заменить требованием существования конечного предела решения на бесконечности. Тогда подходит решение $u_1(r) \equiv 1$. ■

Постановка задачи о нахождении *классического решения*: во внешней задаче Дирихле на плоскости требуется найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в неограниченной области D', непрерывную в замкнутой области $\overline{D}' = D' \cup S$, принимающую на границе заданные значения $u(P) = \mu(P)$, $P \in S$, и *ограниченную на бесконечности* (здесь $D' = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$; D — ограниченная область с границей S). Классическое решение $u(M) \in C\left(\overline{D}'\right) \cap C^2\left(D'\right)$, а задающая его функция $\mu(P) \in C(S)$.

Теорема 3.14. Внешняя задача Дирихле на плоскости может иметь не более одного классического решения, регулярного на бесконечности.

Доказательство. Пусть существуют два классических решения внешней задачи Дирихле $u_1(M)$ и $u_2(M)$, т. е.

$$\Delta u_i(M) = 0, M \in D'; u_i \in C\left(\overline{D}'\right) \cap C^2\left(D'\right);$$

$$u_i(P) = \mu(P), P \in S; \mu(P) \in C(S),$$

$$|u_i(M)| < N/2,\ i = 1,\ 2,\ N = \text{const}.$$

Функция $w(M) = u_1(M) - u_2(M)$ удовлетворяет задаче

$$\Delta w(M) = 0, M \in D'; w \in C\left(\overline{D}'\right) \cap C^2\left(D'\right);$$

$$w(P) = 0,\ P \in S;\ |w(M)| < N,\ N = \text{const}.$$

Выберем внутри области D точку M_0 и построим окружность $L_a^{M_0}$ радиуса a с центром в точке M_0, целиком лежащую внутри D. Пусть R_{MM_0} — расстояние между точками $M \in D'$ и M_0, тогда функция $u_a(M) = \ln \dfrac{R_{MM_0}}{a}$ гармонична в D' и положительна в D',

так как $R_{MM_0} > a$. Построим окружность $L_b^{M_0}$ с центром в точке M_0, содержащую границу S внутри себя. Введем функцию $u_b(M) = N \dfrac{\ln \dfrac{R_{MM_0}}{a}}{\ln \dfrac{b}{a}}$. Она удовлетворяет условиям $\Delta u_b(M) = 0$, $M \in D''$, где D'' — область, заключенная между границами S и $L_b^{M_0}$; $u_b(M)\big|_{M \in S} > 0$ и $u_b(M)\big|_{M \in L_b^{M_0}} = N$. Функция $w(M)$ удовлетворяет условиям $\Delta w(M) = 0$, $M \in D''$, $w(M)\big|_{M \in S} = 0$ и $\left|w(M)\right\|_{M \in L_b^{M_0}} < N$. $|w(M)| \le u_b(M)$ на границе области D'' и, следовательно, в силу принципа максимума $|w(M)| \le u_b(M)$ всюду в области D''. Фиксируем точку M и устремим b в бесконечность. $\lim\limits_{b \to +\infty} u_b(M) = 0$, следовательно, $w(M) = 0$. В силу произвольности выбора точки M получаем $w(M) \equiv 0$ в D'. ■

3.6.5. Внешняя задача Неймана на плоскости $\left(D' \subset \mathbb{R}^2\right)$

Постановка задачи о нахождении *классического решения*: найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в неограниченной области D', удовлетворяющую условию $\dfrac{\partial u(P)}{\partial n} = \nu(P), P \in S,$ и *регулярную на бесконечности* (здесь $D' = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$; D — ограниченная область с границей S). Классическое решение $u(M) \in C^1\left(\bar{D}'\right) \cap C^2\left(D'\right)$, а задающая его в краевом условии функция $\nu(P) \in C(S)$.

Теорема 3.15. Классическое решение внешней задачи Неймана на плоскости, ограниченное и регулярное на бесконечности, определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Доказательство теоремы основано на применении первой формулы Грина к регулярной на бесконечности гармонической функции в неограниченной области D'.

Пусть $M = M(x, y)$. Если $u_1(M)$ и $u_2(M)$ — два решения внешней задачи Неймана, то функция $w(M) = u_1(M) - u_2(M)$ регулярна на бесконечности и удовлетворяет задаче $\Delta w(M) = 0$, $M \in D'$;

$\frac{\partial w(P)}{\partial n} = 0, P \in S$. Решение этой задачи $w(M) \in C^1\left(\overline{D}'\right) \cap C^2\left(D'\right)$.

Поэтому к функции $w(M)$ можно применить первую формулу Грина:

$$\iint\limits_{D'} w(M)\Delta w(M)dxdy = \int\limits_S w(P)\frac{\partial w(P)}{\partial n_P}dl_P -$$

$$-\iint\limits_{D'} (\operatorname{grad} w, \operatorname{grad} w)dxdy.$$

Отсюда $\operatorname{grad} w \equiv \mathbf{0}$ в D', т. е. $w(M) = \text{const}$ в $\overline{D}'$ (из существования у функций $u_1(M)$ и $u_2(M)$ конечных пределов при $M \to \infty$ следует только, что существует конечный предел при $M \to \infty$ и у функции $w(M)$; но он, вообще, не равен нулю). ■

Замечание 3.9. Для существования решения внешней задачи Неймана в $\mathbb{R}^2$, регулярного на бесконечности, необходимо выполнение условия $\int\limits_S \nu(P)dl = 0$. ■

3.6.6. Внешняя третья краевая задача на плоскости $\left(D' \subset \mathbb{R}^2\right)$

Постановка задачи о нахождении *классического решения*: найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ в неограниченной области D' и условию $\frac{\partial u(P)}{\partial n} + h(P)u(P) = \eta(P)$ при $P \in S$, где $\eta(P) \in C(S)$; $h(P) \geq 0$, $h(P) \in C(S)$ ($h(P)$ не равна тождественно нулю), а также *регулярную на бесконечности* (здесь $D' = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$; D — ограниченная область с границей S). Классическое решение $u(M) \in C^1\left(\overline{D}'\right) \cap C^2\left(D'\right)$.

Теорема 3.16. Если функция $h(P) \geq 0$ и не равна тождественно нулю, то внешняя третья краевая задача на плоскости может иметь не более одного классического решения, регулярного на бесконечности.

Доказательство проводится аналогично доказательству для пространственного случая. Аналогом равенства (3.19) будет равенство

$$\int\limits_S h(P)w^2(P)dl_P + \iint\limits_{D'} (\operatorname{grad} w, \operatorname{grad} w)dxdy = 0, \qquad (3.20)$$

где $M = M(x, y)$ теперь является точкой на плоскости. Из (3.20) следует $\operatorname{grad} w \equiv \mathbf{0}$, т. е. $w(M) \equiv \text{const}$, и $\int_S h(P) w^2(P) dl_P = 0$. Отсюда $w(M) \equiv 0$. ■

Замечание 3.10. Доказанные теоремы единственности решений внешних краевых задач справедливы и в случае уравнения Пуассона: $\Delta u = -f$. При этом надо полагать, что функция f достаточно гладкая и отлична от нуля лишь в некоторой ограниченной области. ■

3.7. Решение краевых задач для уравнения Лапласа в областях простой геометрической формы методом разделения переменных

3.7.1. Задача Дирихле в прямоугольнике

В декартовой системе координат Oxy на плоскости

$$\Delta u(x, y) \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0, 0 < x < a, 0 < y < b;$$
$$u\big|_{y=0} = f_1(x), 0 \le x \le a, u\big|_{x=a} = f_2(y), 0 \le y \le b,$$
$$u\big|_{y=b} = f_3(x), 0 \le x \le a, u\big|_{x=0} = f_4(y), 0 \le y \le b.$$

Определенные краевым условием значения $u(x, y)$ заданы на границе прямоугольника *непрерывной функцией.*

Решение. Из требования непрерывности краевого условия имеем:

$f_1(0) = f_4(0)$, $f_1(a) = f_2(0)$, $f_2(b) = f_3(a)$, $f_3(0) = f_4(b)$.

Для упрощения задачи сначала сделаем замену искомой функции $u = v + U$ так, чтобы новая неизвестная функция $v(x, y)$ была гармонична и обращалась в нуль во всех вершинах прямоугольника. Функцию U надо подобрать из соображений ее простоты. Выберем $U(x, y) = A + Bx + Cy + Hxy$ (проверьте ее гармоничность!) и найдем такие коэффициенты A, B, C, H чтобы в задаче

$$v_{xx} + v_{yy} = 0, 0 < x < a, 0 < y < b,$$
$$v\big|_{y=0} = \varphi_1(x) = f_1(x) - U(x, 0), 0 \le x \le a,$$
$$v\big|_{x=a} = \varphi_2(y) = f_2(y) - U(a, y), 0 \le y \le b,$$

$$v\big|_{y=b} = \varphi_3(x) = f_3(x) - U(x,b), 0 \le x \le a,$$
$$v\big|_{x=0} = \varphi_4(y) = f_4(y) - U(0,y), 0 \le y \le b$$

краевые условия во всех вершинах обратились в нуль:

$$A = f_1(0),\ B = \frac{f_1(a) - f_1(0)}{a},\ C = \frac{f_4(b) - f_4(0)}{b},$$

$$H = \frac{f_3(a) - f_3(0) - f_1(a) + f_1(0)}{ab}.$$

Теперь задачу для v можно разбить на более простые: $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$, где

$$\begin{aligned} &\Delta v_1 = 0, \\ &v_1\big|_{y=0} = \varphi_1(x), \\ &v_1\big|_{x=a} = 0, \\ &v_1\big|_{y=b} = 0, \\ &v_1\big|_{x=0} = 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\Delta v_2 = 0, \\ &v_2\big|_{y=0} = 0, \\ &v_2\big|_{x=a} = \varphi_2(y), \\ &v_2\big|_{y=b} = 0, \\ &v_2\big|_{x=0} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Delta v_3 = 0, \\ &v_3\big|_{y=0} = 0, \\ &v_3\big|_{x=a} = 0, \\ &v_3\big|_{y=b} = \varphi_3(x), \\ &v_3\big|_{x=0} = 0, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\Delta v_4 = 0, \\ &v_4\big|_{y=0} = 0, \\ &v_4\big|_{x=a} = 0, \\ &v_4\big|_{y=b} = 0, \\ &v_4\big|_{x=0} = \varphi_4(y). \end{aligned}$$

Задачу для v_1 будем решать методом разделения переменных. Найдем нетривиальные частные решения уравнения Лапласа в прямоугольнике вида $X(x)\,Y(y)$, которые удовлетворяют трем нулевым краевым условиям. Подставим это произведение в уравнение и в указанные краевые условия и разделим уравнение на $X(x)\,Y(y)$:

$$\frac{X''_{xx}(x)}{X(x)} = -\frac{Y''_{yy}(y)}{Y(y)} = -\lambda = \text{const}.$$

Получаем две задачи с параметром λ:

$$\begin{cases} X''_{xx}(x) + \lambda X = 0, 0 < x < a, \\ X(0) = 0, X(a) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Y''_{yy} - \lambda Y = 0, 0 < y < b, \\ Y(b) = 0. \end{cases}$$

Решим задачу Штурма—Лиувилля на отрезке $0 \le x \le a$ и для каждого ее собственного значения найдем решение второй задачи (с точностью до постоянного множителя). В качестве фундаментальной системы решений уравнения для Y удобно выбрать $\operatorname{sh}\left(\sqrt{\lambda}\,(b-y)\right)$, $\operatorname{ch}\left(\sqrt{\lambda}\,(b-y)\right)$. Тогда имеем

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2,$$

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{a};$$

$$Y_n(y) = E_n \operatorname{sh}\frac{\pi n(b-y)}{a},\ E_n = \text{const},\ n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Общее решение уравнения $\Delta v_1 = 0$ в прямоугольнике имеет вид $v_1 = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y)$. Остается найти коэффициенты E_n из последнего краевого условия при $y = 0$. Для этого разложим $\varphi_1(x)$ в ряд Фурье по системе $\{X_n\}$ на отрезке $0 \le x \le a$: коэффициенты Фурье данного разложения $\varphi_{1,n} = \frac{2}{a}\int_0^a \varphi_1(\xi)\sin\frac{\pi n \xi}{a}\,d\xi$, а искомые $E_n = \dfrac{\varphi_{1,n}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n b}{a}}$.

Задачи для v_2, v_3, v_4 решаются аналогично. Но в силу очевидной симметрии их решения можно записать немедленно , глядя на решение v_1. Тогда

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\varphi_{1,n}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n b}{a}} + \varphi_{3,n}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n y}{a}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n b}{a}}\right]\sin\frac{\pi n x}{a} + \right.$$

$$\left. + \left[\varphi_{2,n}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n x}{b}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n a}{b}} + \varphi_{4,n}\frac{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n(a-x)}{b}}{\operatorname{sh}\dfrac{\pi n a}{b}}\right]\sin\frac{\pi n y}{b}\right\} + U(x,y)$$

— формальное решение задачи Дирихле в прямоугольнике. Здесь $\varphi_{1,n}$, $\varphi_{2,n}$, $\varphi_{3,n}$, $\varphi_{4,n}$ — коэффициенты Фурье функций φ_1, φ_2, φ_3, φ_4; они нумеруются одним индексом n. ■

3.7.2. Задача Дирихле в прямоугольном параллелепипеде

Рассмотрим только частный случай, к которому сводится общая задача. В декартовой системе координат $Oxyz$

$\Delta u(x, y, z) \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ при $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$;

$u\big|_{y=b} = \varphi(x, z)$; $u\big|_{S\setminus\{y=b\}} = 0$ — на всех остальных гранях параллелепипеда.

Функция φ непрерывна на грани $\{0 \le x \le a,\ y = b,\ 0 \le z \le c\}$ и обращается в нуль на ее ребрах.

Решение. Найдем нетривиальные частные решения уравнения Лапласа в параллелепипеде вида $V(x, z)\,Y(y)$, которые удовлетворяют нулевым краевым условиям на всех гранях, кроме грани $y = b$. Подставим это произведение в уравнение и в указанные нулевые краевые условия и разделим уравнение на $V(x, z)\,Y(y)$:

$$\frac{V_{xx}(x,z)+V_{zz}(x,z)}{V(x,z)} = -\frac{Y''_{yy}(y)}{Y(y)} = -\lambda = \text{const},$$

$$\begin{cases} \Delta_{x,z}V(x,z)+\lambda V(x,z)=0, \\ 0<x<a, 0<z<c, \\ V\big|_{z=0} = V\big|_{x=a} = V\big|_{z=c} = V\big|_{x=0} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} Y''_{yy} - \lambda Y = 0, 0 < y < b, \\ Y(0) = 0. \end{cases}$$

Задачу Штурма—Лиувилля в прямоугольнике $\{0 \le x \le a,\ 0 \le z \le c\}$ относительно $V(x, z)$ также будем решать, разделяя переменные. Полагаем $V(x, z) = X(x)Z(z)$, тогда $\dfrac{X''_{xx}(x)}{X(x)} + \dfrac{Z''_{zz}(z)}{Z(z)} = -\lambda = \text{const}$, что возможно только, если каждая из двух дробей постоянна: $\dfrac{X''_{xx}(x)}{X(x)} = -\mu = \text{const}$, $\dfrac{Z''_{zz}(z)}{Z(z)} = -\nu = \text{const}$, $\lambda = \mu + \nu$.

Получили две задачи Штурма—Лиувилля на отрезках:

$$\begin{cases} X''_{xx} + \mu X = 0, 0 < x < a, \\ X(0) = 0, X(a) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} Z''_{zz} + \nu \cdot Z = 0, 0 < z < c, \\ Z(0) = 0, Z(c) = 0, \end{cases}$$

$$\mu_m = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2, \quad X_m(x) = \sin\frac{\pi m x}{a}, \quad \nu_n = \left(\frac{\pi n}{c}\right)^2, \quad Z_n(z) = \sin\frac{\pi n z}{c},$$

$m = 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$

Отсюда имеем собственные значения и собственные функции задачи Штурма—Лиувилля в прямоугольнике $\{0 \le x \le a,$

$0 \le z \le c\}$: $\lambda_{m,n} = \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{c}\right)^2$, $V_{m,n}(x,z) = \sin\frac{\pi m x}{a}\sin\frac{\pi n z}{c}$, где m и n — *независимые индексы*. Если наборы индексов $\{m, n\}$ и $\{m', n'\}$ не совпадают, то $V_{m,n}$ и $V_{m',n'}$ ортогональны в смысле скалярного произведения $\int_0^a \int_0^c V_{m,n}(x,z) V_{m',n'}(x,z)\,dz\,dx$. Квадрат евклидовой нормы $\|V_{m,n}\|^2 = \frac{ac}{4}$. Собственному значению λ могут отвечать несколько линейно независимых собственных функций $V_{m,n}$, если λ дается различными наборами индексов $\{m, n\}$.

Теперь с точностью до постоянного множителя $E_{m,n}$ находим $Y_{m,n}(y) = E_{m,n}\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_{m,n}}\,y\right)$.

Решение уравнения $\Delta u = 0$ в параллелепипеде построено в виде *двойного ряда*: $u(x,y,z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} V_{m,n}(x,z) Y_{m,n}(y)$. Остается найти коэффициенты $E_{m,n}$ из последнего краевого условия при $y = b$. Для этого разложим $\varphi(x, z)$ в ряд Фурье по системе $\{V_{m,n}\}$ *в прямоугольнике* $\{0 \le x \le a,\ 0 \le z \le c\}$. Коэффициенты Фурье такого разложения нумеруются двумя индексами m, n:

$$\varphi_{m,n} = \frac{4}{ac}\int_0^a \int_0^c \varphi(\xi,\zeta)\sin\frac{\pi m \xi}{a}\sin\frac{\pi n \zeta}{c}\,d\zeta\,d\xi, \quad E_{m,n} = \frac{\varphi_{m,n}}{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\lambda_{m,n}}\,b\right)}.$$

Формальное решение задачи в параллелепипеде:

$$u(x,y,z) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{\varphi_{m,n}\mathrm{sh}\left(\sqrt{\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{c}\right)^2}\,y\right)}{\mathrm{sh}\left(\sqrt{\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{c}\right)^2}\,b\right)}\sin\frac{\pi m x}{a}\sin\frac{\pi n z}{c}. \quad \blacksquare$$

3.7.3. Задача Дирихле в полуполосе (частный случай)

В декартовой системе координат Oxy на плоскости

$$\Delta u(x,\ y) \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < +\infty,\ 0 < y < a;$$

$u(0,\ y) = f(y)$, f — непрерывная функция на $0 \le y \le a$;

$$u(x,\,0)=f(0)=\text{const},\ 0\le x<+\infty;\ u(x,\,a)=f(a)=\text{const},$$
$$0\le x<+\infty;\ |u(x,\,y)|<\text{const}.$$

Решение. Заметим, что функция $U(x,\,y)=Ay+B$ гармонична, и выберем коэффициенты A, B из краевых условий: $U=\dfrac{f(a)-f(0)}{a}y+f(0)$. Положим $u=v+U$ и обозначим через $g(y)$ разность $f-U$. Тогда для новой неизвестной функции v получим задачу

$$\Delta v=0,0<x<+\infty,0<y<a,\left|v(x,y)\right|<\text{const},$$
$$v(0,y)=(u-U)\big|_{x=0}=g(y),0\le y\le a,$$
$$v(x,0)=0,0\le x<+\infty;v(x,a)=0,0\le x<+\infty.$$

Найдем нетривиальные частные решения уравнения Лапласа в полуполосе вида $v(x,\,y)=X(x)\,Y(y)$, которые удовлетворяют нулевым краевым условиям при $y=0$ и $y=a$. Подставим это произведение в уравнение и в указанные краевые условия и разделим уравнение на $X(x)\,Y(y)$. Проведем разделение переменных:

$$\begin{cases}X''_{xx}(x)-\lambda X=0,0<x<+\infty,\\ \left|X(x)\right|<\text{const};\end{cases}\quad\begin{cases}Y''_{yy}+\lambda Y=0,0<y<a,\\ Y(0)=0,Y(a)=0.\end{cases}$$

Найдем собственные функции задачи Штурма—Лиувилля для Y и отвечающие ее собственным значениям *ограниченные решения* уравнения для X. Решениями этих задач являются $\lambda_n=\left(\dfrac{\pi n}{a}\right)^2$, $Y_n(y)=\sin\dfrac{\pi ny}{a}$; $X_n(x)=E_n\mathrm{e}^{-\frac{\pi nx}{a}}$, где $E_n=\text{const}$, $n=1,2,\ldots$ (решение $X_n(x)=\mathrm{e}^{\frac{\pi nx}{a}}$ надо отбросить).

Решение уравнения $\Delta v=0$ в полуполосе надо строить в виде $v=\sum\limits_{n=1}^{\infty}X_n(x)Y_n(y)$.

Коэффициенты E_n найдем из краевого условия при $x=0$. Для этого разложим $g(y)$ в ряд Фурье по системе $\{Y_n\}$ на отрезке $0\le y\le a$. Тогда $u(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_n\mathrm{e}^{-\frac{\pi nx}{a}}\sin\dfrac{\pi ny}{a}+U(x,y)$ — формальное решение исходной задачи, где g_n — коэффициенты Фурье функции g. ■

3.7.4. Задача Дирихле в круге

В полярной системе координат r, φ на плоскости эта задача имеет вид

$$\Delta u(r,\varphi) \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, 0 \le r < a, 0 \le \varphi < 2\pi;$$

$u(a,\varphi) = f(\varphi), 0 \le \varphi < 2\pi$, где f — непрерывная функция на окружности $r = a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ (следовательно, $f(0) = f(2\pi)$).

Удобно полагать, что переменная φ принимает все действительные значения, тогда из однозначности функции u для всех φ следует $u(r,\varphi) = u(r,\varphi + 2\pi)$, а $f(\varphi)$ должна быть периодически продолжена на $-\infty < \varphi < +\infty$ с периодом 2π.

Решение. Найдем сначала нетривиальные частные решения уравнения Лапласа в круге вида $R(r)\Phi(\varphi)$. Подставим это произведение в уравнение и разделим его на $\dfrac{R(r)\Phi(\varphi)}{r^2}$. После разделения переменных получим две задачи для отличных от тождественного нуля функций $\Phi(\varphi)$ и $R(r)$:

$$\begin{cases} \Phi''_{\varphi\varphi} + \lambda\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi), -\infty < \varphi < +\infty, \end{cases} \quad r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \lambda R, 0 \le r < a,$$

с подлежащим определению параметром λ.

При $\lambda < 0$ периодических решений $\Phi(\varphi)$ нет. При $\lambda \ge 0$ общее решение уравнения имеет вид $\Phi(\varphi) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right)$, а условие периодичности дает $\sqrt{\lambda} = n = 0,1,2,\ldots$ Итак, при каждом указанном n $\Phi_n(\varphi) = A_n\cos(n\varphi) + B_n\sin(n\varphi)$ — искомые решения.

Относительно $R(r)$ имеем уравнение Эйлера $r^2R''_{rr} + rR'_r - \lambda R = 0$, которое заменой независимой переменной $r = e^p$ сводится к уравнению с постоянными коэффициентами относительно $R = R(r(p))$: $R''_{pp} - \lambda R = 0$. При $\lambda = 0$ имеем $R = C_0 + H_0 p = C_0 + H_0\ln r$, где C_0 и H_0 — произвольные постоянные. При $\lambda > 0$ имеем $R = Ce^{-\sqrt{\lambda}p} + He^{\sqrt{\lambda}p} = Cr^{-\sqrt{\lambda}} + Hr^{\sqrt{\lambda}}$. Здесь C и H — произвольные постоянные. Функции $\ln r$ и $r^{-\sqrt{\lambda}}$, $\lambda > 0$ имеют особенности при $r = 0$. Решая *внутреннюю задачу в круге*, необходимо их отбросить.

Теперь $r^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, — частные решения уравнения Лапласа в круге, а в силу линейности уравнения

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} r^n\left(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\right) \tag{3.21}$$

– его общее решение. Для нахождения решения исходной задачи Дирихле подставим полученный ряд в краевое условие и разложим $f(\varphi)$ в ряд Фурье по системе синусов и косинусов.

Формальное решение:

$$u(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi\right),$$

где $\alpha_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\xi)\,d\xi$;

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\cos n\xi\,d\xi,\ \ \beta_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\sin n\xi\,d\xi.\ \blacksquare$$

Замечание 3.11. Решение, построенное в виде ряда, можно записать в виде интеграла, который называется ***интегралом Пуассона***. Для этого подставим выражения α_n и β_n в ряд, дающий решение предыдущей задачи. Поменяем порядок суммирования и интегрирования.

Тогда $u(r,\varphi)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(\xi)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos n(\varphi-\xi)\right\}d\xi$. Для преобразования выражения в фигурных скобках вспомним, что $\cos n(\varphi-\xi)=\dfrac{1}{2}\left(\exp\left\{in(\varphi-\xi)\right\}+\exp\left\{-in(\varphi-\xi)\right\}\right)$ (i — мнимая единица), учтем условие $0<\dfrac{r}{a}<1$, записывая суммы членов двух геометрических прогрессий со знаменателями $\dfrac{r}{a}\exp\left\{\pm in(\varphi-\xi)\right\}$. В результате вместо ряда Фурье решение $u(r,\varphi)$ получится в виде интеграла:

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\frac{a^2-r^2}{r^2-2ra\cos(\varphi-\xi)+a^2}\,d\xi.\ \blacksquare$$

3.7.5. Задача Дирихле вне круга

В области $0<a<r<+\infty$, $0\le\varphi<2\pi$ (r, φ — полярные координаты) надо найти гармоническую функцию, *регулярную на*

бесконечности. В двумерном случае это требование сводится к ограниченности искомого решения $u(r, \varphi)$. Разделяя переменные в уравнении Лапласа в полярной системе координат, необходимо теперь отбросить $\ln r$ и $r^{\sqrt{\lambda}}$, $\lambda > 0$. Решение уравнения Лапласа вне круга, регулярное на бесконечности, надо строить в виде

$$u(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n} \left(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi\right). \qquad (3.22)$$

Раскладывая в ряд Фурье по системе синусов и косинусов заданную при $0 \le \varphi \le 2\pi$ непрерывную функцию $f(\varphi)$ в краевом условии $u\big|_{r=a} = f$ $(f(0) = f(2\pi))$, найдем все A_n и B_n. Учитывая, что $0 < \dfrac{a}{r} < 1$, запишем построенное формальное решение в виде интеграла Пуассона:

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n \left(\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \frac{r^2 - a^2}{r^2 - 2ra\cos(\varphi - \xi) + a^2}\, d\xi,$$

где α_n и β_n — коэффициенты Фурье функции f. ■

3.7.6. Задачи Неймана в круге и вне круга

Эти задачи не содержат информации, позволяющей определить коэффициент A_0 в решении уравнения Лапласа в полярной системе координат.

Подставим ряд (3.21) в краевое условие $\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = g(\varphi)$ в случае внутренней задачи и разложим функцию g в ряд Фурье, учтем $\int_0^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi = 0$. Тогда в (3.21) можно определить все A_n и B_n, $n \neq 0$.

В случае внешней задачи ищем гармоническую функцию, регулярную на бесконечности. Подставим ряд (3.22) в краевое условие $\left.\dfrac{\partial u}{\partial(-r)}\right|_{r=a} = g(\varphi)$ и разложим g в ряд Фурье, учтем $\int_0^{2\pi} g(\varphi)\, d\varphi = 0$. Тогда в (3.22) можно определить все A_n и B_n, $n \neq 0$. ■

3.7.7. Задача Дирихле в круговом кольце

В полярной системе координат эта задача имеет вид $\Delta u = 0$, $a < r < b$, $0 \le \varphi < 2\pi$; $u(a, \varphi) = f_1(\varphi)$, $0 \le \varphi < 2\pi$; $u(b, \varphi) = f_2(\varphi)$, $0 \le \varphi < 2\pi$. Будем считать, что непрерывные (или кусочно-непрерывные) функции f_1, f_2 периодически продолжены на $-\infty < \varphi < +\infty$, и $u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2\pi)$ для всех φ.

Решение. Разделяя переменные, снова получим две задачи для определения функций $\Phi(\varphi)$ и $R(r)$, которые не отличаются от случая, когда областью был круг. Какие решения $R(r)$ теперь следует использовать? Очевидно, что в кольце следует учитывать все частные решения $R(r)$, поскольку в кольце они не имеют особенностей. Решение уравнения Лапласа в кольце надо строить в виде

$$u(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^n} \right) \cos n\varphi + \left(C_n r^n + \frac{H_n}{r^n} \right) \sin n\varphi \right].$$

Подставляя этот ряд в краевые условия и раскладывая f_1 и f_2 в ряды Фурье, получим для каждой пары коэффициентов $\{A_0, B_0\}$, $\{A_n, B_n\}$, $\{C_n, H_n\}$ систему двух алгебраических уравнений. ■

3.7.8. Задача Дирихле в круговом секторе

Рассмотрим частный случай:

$$\Delta u = 0,\ 0 < r < a,\ 0 < \varphi < \alpha < 2\pi;$$

$$u(r,\ 0) = 0,\ u(r,\ \alpha) = 0,\ 0 \le r \le a,$$

$$u(a,\ \varphi) = f(\varphi),\ 0 < \varphi < \alpha,$$

где f — непрерывная функция; $f(0) = f(\alpha) = 0$.

Решение. Разделив переменные в уравнении Лапласа, получим две задачи с подлежащим определению параметром λ:

$$\begin{cases} \Phi''_{\varphi\varphi} + \lambda\Phi = 0, 0 < \varphi < \alpha, \\ \Phi(0) = 0, \Phi(\alpha) = 0, \end{cases} \quad r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) = \lambda R, 0 \le r < a.$$

Решение первой задачи имеет вид $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2$, $\Phi_n(\varphi) = \sin\frac{\pi n\varphi}{\alpha}$, $n = 1, 2, \ldots$ Среди решений $R(r)$ надо сохранить только те, кото-

рые не имеют особенностей вплоть до границы области: $R_n(r) = r^{\sqrt{\lambda_n}}$. Решение $u(r, \varphi)$ надо строить в виде ряда $u(r,\varphi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}} \sin\dfrac{\pi n \varphi}{\alpha}$. Подставляя этот ряд в краевое условие при $r = a$ и раскладывая функцию f в ряд Фурье по системе $\{\Phi_n\}$ на отрезке $0 \le \varphi \le \alpha$, найдем все B_n. ■

Замечание 3.12. Решение каждой краевой задачи, построенное методом разделения переменных в виде ряда, является формальным: требуется еще доказать, что этот ряд определяет классическое решение. ■

Замечание 3.13. Метод разделения переменных в других областях часто приводит к задачам Штурма—Лиувилля, решения которых выражаются через *специальные функции* математической физики (чаще всего — через цилиндрические или сферические функции). Теория специальных функций составляет предмет отдельного курса. ■

3.8. Функция Грина внутренней задачи Дирихле

Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона (в частности, для уравнения Лапласа) в области D можно представить в интегральном виде, если для D известна *функция Грина* этой задачи. В данном подразделе будем предполагать, что область D ограничена ($D \subset \mathbb{R}^3$ или $D \subset \mathbb{R}^2$) и имеет достаточно гладкую границу S. Требование достаточной гладкости границы S связано с желанием пользоваться формулами Грина и представлять решение задачи Дирихле с помощью функции Грина и производной по нормали к S от функции Грина этой краевой задачи. Выражение «S — достаточно гладкая граница области D» означает, что для нее справедлива первая формула Грина.

3.8.1. Функция Грина внутренней задачи Дирихле в области $D \subset \mathbb{R}^3$

Пусть D — *ограниченная область* в $\mathbb{R}^3$ с границей S. Внутренняя задача Дирихле для уравнения Пуассона состоит в нахождении функции $u(M)$, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta u(M) = -f(M),\ M \in D,$$

и краевому условию первого рода

$$u(P) = \mu(P),\ P \in S.$$

Решение этой задачи будем предполагать классическим: $u \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^2(D)$. (Мы не требуем, чтобы $u \in C^1\left(\overline{D}\right)$, поэтому для применения формул Грина нужно предположить, что S — поверхность класса C^2. Это предположение гарантирует выполнение формул Грина для функций u, v из $C\left(\overline{D}\right) \cap C^2(D)$, имеющих правильные нормальные производные на S и Δu, $\Delta v \in L_2(D)$ [8, § 24].)

Запишем интегральное представление решения во внутренней точке M_0 области D:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \frac{1}{R_{PM_0}} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{PM_0}} \right) \right\} dS_P - \\ - \frac{1}{4\pi} \iiint_D \frac{\Delta u(M)}{R_{MM_0}} dD_M. \tag{3.23}$$

Пусть функция $v(M)$ гармонична в области D и непрерывна вместе с первыми производными в замкнутой области $\overline{D}$. Применим к функциям $u(M)$ и $v(M)$ вторую формулу Грина:

$$0 = \iint_S \left[v(P) \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial v(P)}{\partial n_P} \right] dS_P - \\ - \iiint_D v(M) \Delta u(M) dD_M. \tag{3.24}$$

Сложив формулы (3.23) и (3.24), получим

$$u(M_0) = \iint_S \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} G(P, M_0) - u(P) \frac{\partial G(P, M_0)}{\partial n_P} \right\} dS_P - \\ - \iiint_D G(M, M_0) \Delta u(M) dD_M,$$

где $G(M, M_0) = \dfrac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v(M)$.

Если потребовать, чтобы выполнялось условие $G(P,\ M_0) = 0$, $P \in S$, то

$$u(M_0) = -\iint\limits_S u(P)\frac{\partial G(P, M_0)}{\partial n_P} dS_P - \\ -\iiint\limits_D \Delta u(M) G(M, M_0)\, dD_M.$$

Определение 3.5. Функция $G(M,\ M_0)$ называется ***функцией Грина*** внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в $D \subset \mathbb{R}^3$, если:

1) $G(M, M_0) = \dfrac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v(M)$, где функция $v(M)$ гармонична всюду в области D;

2) $G(P,\ M_0) = 0$, $P \in S$.

Из определения следует, что функция Грина $G(M,\ M_0)$ с точностью до гармонической функции v является фундаментальным решением уравнения Лапласа. Второе требование в определении продиктовано типом граничного условия. Если функция Грина $G(M,\ M_0)$ существует, то решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона находим в явном виде по формуле

$$u(M_0) = -\iint\limits_S \mu(P)\frac{\partial G(P, M_0)}{\partial n_P} dS_P + \\ +\iiint\limits_D f(M) G(M, M_0)\, dD_M. \qquad (3.25)$$

Замечание 3.14. Формула (3.25) содержит производную $\dfrac{\partial G(M, M_0)}{\partial n_M}$, существование которой не следует из определения. ■

Формула (3.25) дает классическое решение задачи Дирихле при выполнении условий $\mu \in C(S)$ и $f \in C^1\left(\overline{D}\right)$.

Замечание 3.15. Если пользоваться языком обобщенных функций и обобщенных решений, то $G(M,\ M_0)$ для каждой точки $M_0 \in D$ удовлетворяет уравнению Пуассона $\Delta_M G(M,\ M_0) = -\delta(M,\ M_0)$, где $\delta(M,\ M_0)$ — сосредоточенная в точке M_0 δ-функция: $\delta(M,\ M_0) = \delta(x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$, $M = M(x,\ y,\ z)$, $M_0 = M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

Применив вторую формулу Грина к решениям $u(M)$ и $G(M, M_0)$ двух задач

$$\begin{cases}\Delta u(M) = -f(M), M \in D,\\ u(P) = \mu(P), P \in S,\end{cases} \quad \begin{cases}\Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), M \in D,\\ G(P, M_0) = 0, P \in S,\end{cases}$$

получим $u(M_0)$ в виде (3.25) (проверьте!). ■

Для построения функции Грина $G(M, M_0)$ необходимо найти функцию $v(M) = v(M, M_0)$ (M_0 — параметр), удовлетворяющую задаче

$$\Delta v(M) = 0, \ M \in D, \tag{3.26}$$

$$v(P) = -\frac{1}{4\pi R_{PM_0}}, P \in S. \tag{3.27}$$

Для достаточно широкого класса поверхностей S (так называемых поверхностей Ляпунова) задача (3.26), (3.27) разрешима, поэтому функция Грина существует.

Замечание 3.16. Возможность ввести функцию Грина в задаче Дирихле объясняется тем, что $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи $\Delta u = \lambda u$ в области D, $u = 0$ на границе S, т. е. однородная краевая задача $\Delta u = 0$ в D, $u|_S = 0$ имеет только тривиальное решение.

Замечание 3.17. В случае внутренней задачи Неймана в $\mathbb{R}^3$ число $\lambda = 0$ является собственным значением задачи $\Delta u = \lambda u$ в области D, $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ на границе S, поэтому функцию Грина такой задачи надо определять по-другому: $G(M, M_0) = \dfrac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v(M)$, $\Delta v(M) = 0$ в D, а вместо условия $G(P, M_0) = 0$, $P \in S$, надо требовать $\dfrac{\partial G(P, M_0)}{\partial n_P} = -\dfrac{1}{|S|}$, $P \in S$, где $\mathbf{n}_P$ — единичная нормаль к S, внешняя по отношению к D; $|S|$ — площадь поверхности S.

Так введенная функция $G(M, M_0)$ определена с точностью до постоянного слагаемого, зависящего от точки M_0. Если еще потребовать $\iint\limits_S G(P, M_0)\, dS_P = 0$, то решение внутренней задачи Неймана $\Delta u = 0$ в D, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \nu$, $\iint\limits_S \nu(P)\, dS_P = 0$ будет определяться формулой

$$u(M_0) = \iint\limits_S G(P, M_0)\nu(P)\, dS_P + \text{const}. \ ■$$

Замечание 3.18. Функцию Грина можно ввести и для *внешней задачи Дирихле.* Для этого в области D', внешней к ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$, надо использовать формулы Грина, учитывающие регулярность функций на бесконечности. Поэтому надо дополнительно потребовать $G(M, M_0)$ при $M \to \infty$ равномерно стремится к нулю. ■

3.8.2. Свойства функции Грина внутренней задачи Дирихле

Теорема 3.17. Если $M, M_0 \in D$, то $G(M, M_0) > 0$.

Доказательство. Точку M_0, в которой функция Грина имеет особенность, вырежем шаром K_ε с центром M_0, ограниченным сферой Σ_ε. Из представления функции Грина следует, что на поверхности Σ_ε и внутри нее $G(M, M_0) > 0$ и $G(P, M_0) = 0$, $P \in S$. Так как функция Грина $G(M, M_0)$ в области, заключенной между поверхностями Σ_ε и S, удовлетворяет уравнению Лапласа, то в силу принципа минимума $G(M, M_0) > 0$ всюду в области, заключенной между поверхностями Σ_ε и S. В силу произвольности выбора ε получаем $G(M, M_0) > 0$ всюду в области D. ■

Замечание 3.19. Так как функция $v(M)$ удовлетворяет задаче (3.26), (3.27), то из принципа максимума следует, что $v(M) < 0$ всюду в области D.

Следовательно, $G(M, M_0) = \dfrac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v(M) < \dfrac{1}{4\pi R_{MM_0}}$. Отсюда получаем границы изменения значений функции $G(M, M_0)$: $0 \le G(M, M_0) < \dfrac{1}{4\pi R_{MM_0}}$, $M \neq M_0$, причем равенство нулю учитывает, что $G(P, M_0) = 0$, $P \in S$. ■

Теорема 3.18. Функция Грина симметрична относительно точек M_0 и M: $G(M_0, M) = G(M, M_0)$ (это свойство называется принципом взаимности).

Доказательство. Пусть M_1 и M_2 — некоторые фиксированные точки области D. Построим сферы $\Sigma_\varepsilon^{M_1}$ и $\Sigma_\varepsilon^{M_2}$ радиусов ε с центрами в точках M_1 и M_2. Введем функции $w_1(M) = G(M, M_1)$ и $w_2(M) = G(M, M_2)$ и применим к ним вторую формулу Грина в области $D \setminus \left(K_\varepsilon^{M_1} \cup K_\varepsilon^{M_2}\right)$, где $K_\varepsilon^{M_1}$ и $K_\varepsilon^{M_2}$ — шары радиусов ε с центрами в точках M_1 и M_2:

$$\iiint\limits_{D\setminus\left(K_\varepsilon^{M_1}\cup K_\varepsilon^{M_2}\right)}\left(w_1(M)\Delta w_2(M)-w_2(M)\Delta w_1(M)\right)dD_M=$$

$$=\iint\limits_{S}\left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}-w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)dS_P+$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}}\left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}-w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)dS_P+$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}}\left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}-w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)dS_P.$$

Учитывая, что функции $w_1(M)$ и $w_2(M)$ удовлетворяют уравнению Лапласа в $D\setminus M_1$ и $D\setminus M_2$ соответственно, а на границе S области D принимают нулевые значения, получим

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}}\left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}-w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)dS_P+$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}}\left(w_1(P)\frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P}-w_2(P)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)dS_P=0,$$

где нормали $\mathbf{n}_P$ к поверхностям $\Sigma_\varepsilon^{M_1}$ и $\Sigma_\varepsilon^{M_2}$ направлены внутрь шаров $K_\varepsilon^{M_1}$ и $K_\varepsilon^{M_2}$.

Последняя формула означает, что

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}}\left(G(P,M_1)\frac{\partial G(P,M_2)}{\partial n_P}-G(P,M_2)\frac{\partial G(P,M_1)}{\partial n_P}\right)dS_P+$$

$$+\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}}\left(G(P,M_1)\frac{\partial G(P,M_2)}{\partial n_P}-G(P,M_2)\frac{\partial G(P,M_1)}{\partial n_P}\right)dS_P=0. \tag{3.28}$$

Функции $w_1(M)$ и $w_2(M)$ внутри шаров $K_\varepsilon^{M_2}$ и $K_\varepsilon^{M_1}$ соответственно удовлетворяют уравнению Лапласа. Напишем интегральное представление функции $w_1(M)$ в точке M_2 и функции $w_2(M)$ в точке M_1:

$$w_1(M_2)=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}}\left(w_1(P)\frac{\partial G(P,M_2)}{\partial n_P}-G(P,M_2)\frac{\partial w_1(P)}{\partial n_P}\right)dS_P=$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_2}}\left(G(P,M_1)\frac{\partial G(P,M_2)}{\partial n_P}-G(P,M_2)\frac{\partial G(P,M_1)}{\partial n_P}\right)dS_P,$$

$$w_2(M_1) = \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}} \left(w_2(P) \frac{\partial G(P, M_1)}{\partial n_P} - G(P, M_1) \frac{\partial w_2(P)}{\partial n_P} \right) dS_P =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon^{M_1}} \left(G(P, M_2) \frac{\partial G(P, M_1)}{\partial n_P} - G(P, M_1) \frac{\partial G(P, M_2)}{\partial n_P} \right) dS_P.$$

Сравнивая полученные выражения для $w_1(M_2)$ и $w_2(M_1)$ с формулой (3.28), получим $w_1(M_2) - w_2(M_1) = 0$ или $G(M_1, M_2) = G(M_2, M_1)$. ■

3.8.3. Построение функции Грина методом зеркальных изображений

Функция Грина задачи Дирихле $G(M, M_0)$ допускает различные физические интерпретации. Примем электростатическую интерпретацию. Пусть поверхность S, ограничивающая область $D \subset \mathbb{R}^3$, сделана из идеального проводника и заземлена. Поместим в точке M_0 внутри D электрический заряд величиной $\frac{1}{4\pi}$. Этот заряд индуцирует распределение зарядов на S, поэтому потенциал электростатического поля в области D (в вакууме в системе единиц СГСЭ) равен сумме потенциала $\frac{1}{4\pi R_{MM_0}}$ поля точечного заряда и потенциала $v(M, M_0)$ поля индуцированных зарядов. Эта сумма и равна $G(M, M_0)$.

Если мысленно убрать индуцированные на S заряды, то для сохранения прежнего потенциала G в области D придется разместить некоторые точечные заряды вне поверхности S, которые в D создадут поле с потенциалом v. Эти заряды являются зеркальными относительно S изображениями заряда, помещенного в точку M_0. Такой прием позволяет для областей простой геометрической формы найти $v(M, M_0)$ и построить функцию Грина.

3.8.4. Функция Грина внутренней задачи Дирихле в области на плоскости $(D \subset \mathbb{R}^2)$

Отличие случая двух независимых переменных от только что рассмотренного состоит в характере особенности фундаментального решения уравнения Лапласа при $M = M_0$.

Определение 3.6. Функция $G(M,\, M_0)$ называется ***функцией Грина*** внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в $D \subset \mathbb{R}^2$, если:

1) $G(M, M_0) = \dfrac{1}{2\pi} \ln\left(\dfrac{1}{R_{MM_0}}\right) + v(M)$, где функция $v(M)$ гармонична всюду в области D;

2) $G(P,\, M_0) = 0$, $P \in S$.

Функция $\ln\left(\dfrac{1}{R_{MM_0}}\right)$ имеет смысл электростатического потенциала в точке $M \in D \subset \mathbb{R}^2$, создаваемого равномерно заряженной прямой линией, перпендикулярной плоскости, в которой расположена область D, и проходящей через точку M_0. Поэтому для построения функции Грина можно пользоваться методом зеркальных изображений: кривую S, ограничивающую область D, надо рассматривать как направляющую для бесконечного цилиндрического зеркала, образующая которого перпендикулярна плоскости D.

3.9. Поверхностные потенциалы двойного и простого слоев. Объемный потенциал

3.9.1. Потенциалы

Основная формула Грина в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей S дает интегральное представление функции $u \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2\left(D\right)$:

$$u(M) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_S \left(\frac{1}{R_{PM}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{PM}} \right) \right) dS_P -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_D \frac{\Delta u(P)}{R_{PM}} dD_P, \tag{3.29}$$

где $M \in D$; R_{PM} — расстояние между точками P и M.

Формула (3.29) содержит интегралы трех типов:

$$\iint\limits_S \frac{\mu(P)}{R_{PM}} dS_P, \tag{3.30}$$

$$\iint\limits_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{PM}}\right)dS_P, \tag{3.31}$$

$$\iiint\limits_D \frac{\rho(P)}{R_{PM}}dD_P, \tag{3.32}$$

каждый из которых имеет определенный физический смысл. Интегралы (3.30), (3.31), (3.32) называются соответственно *потенциалом простого слоя, потенциалом двойного слоя, объемным потенциалом*; функции μ, ν, ρ — *плотности*, задающие эти потенциалы. Интегралы (3.30), (3.31), (3.32) являются интегралами, зависящими от параметров: координаты точки наблюдения M являются параметрами.

Интегралы (3.30), (3.31), (3.32) называют *ньютоновскими потенциалами* (в $\mathbb{R}^3$). Наряду с ними можно ввести *логарифмические потенциалы* (в $\mathbb{R}^2$). Основная формула Грина в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей S дает интегральное представление функции $u \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2(D)$:

$$u(M) = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_S \left(\ln\frac{1}{R_{PM}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\ln\frac{1}{R_{PM}}\right)\right)dl_P -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_D \Delta u(P)\ln\frac{1}{R_{PM}}dx_P dy_P, \tag{3.33}$$

где параметрами являются координаты точки $M \in D$.

Формула (3.33) содержит интегралы трех типов:

$$\oint\limits_S \mu(P)\ln\frac{1}{R_{PM}}dl_P, \tag{3.34}$$

$$\oint\limits_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\ln\frac{1}{R_{PM}}\right)dl_P, \tag{3.35}$$

$$\iint\limits_D \rho(P)\ln\frac{1}{R_{PM}}dx_P dy_P. \tag{3.36}$$

Задачи вычисления потенциалов (3.30), (3.31), (3.32) и (3.34), (3.35), (3.36) имеют самостоятельное физическое значение. Нас эти интегралы будут интересовать в основном в связи с вопросом о *существовании решений* задач Дирихле и Неймана, которые здесь будем записывать в виде

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, M \in D, \\ u|_{M \in S} = f(M); f \in C(S), \end{cases} \tag{3.37}$$

$$\begin{cases} \Delta u(M) = 0, M \in D, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{M \in S} = g(M); g \in C(S). \end{cases} \tag{3.38}$$

Оказывается, что решение задачи Дирихле представляет собой потенциал двойного слоя (3.31) (или (3.35)), плотность ν которого удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Решение задачи Неймана представляет собой потенциал простого слоя (3.30) (или (3.34)), плотность μ которого также удовлетворяет интегральному уравнению указанного типа. Поэтому существование решений задач (3.37) или (3.38) (а также соответствующих внешних задач) следует из теории Фредгольма. Потенциал (3.32) (или (3.36)) в области D удовлетворяет уравнению Пуассона, поэтому частное решение уравнения Пуассона естественно искать в виде (3.32) (или (3.36)) с заданной плотностью ρ.

3.9.2. Поверхностный потенциал двойного слоя

Пусть в точке P_1 пространства $\mathbb{R}^3$ находится заряд $-e$, а на расстоянии h от него в точке P_2 — заряд $+e$. В точке наблюдения M потенциал создаваемого этими зарядами электрического поля равен $w(M) = \dfrac{e}{R_{P_2M}} - \dfrac{e}{R_{P_1M}}$ (в вакууме, в системе единиц СГСЭ).

Величину $\nu = eh$ называют величиной *момента диполя*; точки P_1 и P_2 определяют *ось диполя* $\mathbf{n}$, направленную от $-e$ к $+e$; момент диполя — это вектор $\nu = e\mathbf{h}$. Если h *мало* по сравнению с расстояниями R_{P_1M} и R_{P_2M}, то к выражению $w(M)$ можно применить формулу Лагранжа:

$$w(M) = \frac{\nu}{h}\left(\frac{1}{R_{P_2M}} - \frac{1}{R_{P_1M}}\right) = \frac{\nu}{h}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{PM}}\right)\Bigg|_{P=P^*} h,$$

где $\mathbf{n}$ — единичный направляющий вектор оси диполя, а точка P^* лежит между P_1 и P_2 на этой оси.

Будем сближать P_1 и P_2 вдоль фиксированной оси $\mathbf{n}$, *сохраняя момент диполя* ($h \to 0$, $e \to +\infty$). Тогда в пределе получим то-

чечный диполь, расположенный в точке P, с осью $\mathbf{n}$ и величиной момента ν (не следует думать, что заряды противоположных знаков компенсируют друг друга: мы выполняем предельный переход с сохранением момента ν при $-e \to -\infty$, $+e \to +\infty$). В точке M этот точечный диполь создает потенциал $w(M) = \nu \dfrac{\partial}{\partial n_P}\left(\dfrac{1}{R_{PM}}\right)$, где производная берется по координатам точки P в направлении оси $\mathbf{n}$:

$$\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{PM}}\right) = \left|\operatorname{grad}\frac{1}{R_{PM}}\right||\mathbf{n}|\cos\varphi, \quad \operatorname{grad}_P \frac{1}{R_{PM}} = \frac{1}{R_{PM}^2}\frac{\overrightarrow{PM}}{|\overrightarrow{PM}|},$$

где $\left|\operatorname{grad}\dfrac{1}{R_{PM}}\right| = \dfrac{1}{R_{PM}^2}$; $|\mathbf{n}| = 1$; φ — угол между $\mathbf{n}$ и вектором $\overrightarrow{PM}$.

Итак, $w(M) = \nu \dfrac{\cos\varphi}{R_{PM}^2}$.

Пусть S — двусторонняя гладкая поверхность, $\mathbf{n}_P$ — нормаль к S в точке P, $|\mathbf{n}_P| = 1$ (поверхность S должна удовлетворять некоторым дополнительным требованиям: она является поверхностью Ляпунова). Пусть точечные диполи распределены по поверхности S с поверхностной плотностью распределения $\nu(P)$. Это означает, что величина дипольного момента в точке $P \in S$ равна $\nu(P)\,dS_P$. Будем предполагать, что $\nu \in C(S)$ и что ось диполя в каждой точке $P \in S$ совпадает с направлением нормали $\mathbf{n}_P$. Такой двойной слой зарядов, распределенных по S, создает в точке M потенциал

$$w(M) = \iint_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{PM}}\right)dS_P = \iint_S \nu(P)\frac{\cos\varphi}{R_{PM}^2}dS_P, \quad (3.31)$$

где $\varphi = \varphi(P, M)$ — угол между $\mathbf{n}_P$ и $\overrightarrow{PM}$.

Если $M \notin S$, то интеграл (3.31) собственный; если $M \in S$, то несобственный.

Выделим элемент dS_P поверхности S и обозначим через $d\omega_{PM}$ телесный угол, под которым из точки M виден элемент dS_P. По определению $d\omega_{PM}$ есть площадь элемента единичной сферы с центром в точке M, который высекается конусом с вершиной M, опирающимся на dS_P. Припишем величине $d\omega_{PM}$ определенный знак, связав его выбор с направлением нормали $\mathbf{n}_P$. Если радиус сферы с центром в M равен R_{PM}, а не 1, то площадь, высекаемая

на такой сфере указанным конусом, равна $R_{PM}^2 d\omega_{PM}$. Рассматриваем dS_P как элемент плоскости, касательной к S в точке P. Проведем через P плоскость, перпендикулярную вектору $\overrightarrow{PM}$, и спроектируем на нее dS_P. Тогда площадь этой проекции равна $\cos\varphi dS_P = R_{PM}^2 d\omega_{PM}$. Будем считать, что $d\omega_{PM} > 0$, если угол φ острый, и $d\omega_{PM} < 0$, если φ тупой. Тогда

$$w(M) = \iint\limits_S \nu(P) d\omega_{PM}. \tag{3.39}$$

Не проводя подробных доказательств, сформулируем свойства поверхностного потенциала двойного слоя.

Свойство 3.1. Если S — поверхность конечной кривизны, то потенциал (3.31), (3.39) определен всюду в $\mathbb{R}^3$, включая точки $M \in S$.

Доказательство следует из (3.39). ■

Свойство 3.2. В точках $M \notin S$ потенциал (3.31), (3.39) есть гармоническая функция.

Доказательство следует из того, что при $M \notin S$ интеграл (3.31) собственный, а функция $1/\mathrm{R}_{PM}$ гармонична по M. ■

Свойство 3.3. Если поверхность S ограничена и имеет конечную площадь, то $w(M) \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Доказательство следует из формулы среднего значения:

$$w(M) = \left(\nu(P)\frac{\cos\varphi}{R_{PM}^2}\right)\Bigg|_{P=P^*} \iint\limits_S dS_P. \ \blacksquare$$

Свойство 3.4. Пусть S — замкнутая поверхность, ограничивающая конечную область D. Тогда в точках $M \in S$ потенциал (3.31), (3.39) имеет разрыв первого рода со скачком, равным $4\pi\nu(M)$.

Свойство 3.4 следует уточнить. Пусть $\mathbf{n}_{M_0}$ — *внутренняя* нормаль к S (направлена внутрь области D), $M_0 \in S$. Введем следующие обозначения: $w^-(M_0) = \lim\limits_{M\to M_0} w(M)$ при условии, что $M \notin S$ и $M \to M_0$ с внутренней стороны S (*против* направления выбранной нормали, поэтому w^-); $w^+(M_0) = \lim\limits_{M\to M_0} w(M)$ при

условии, что $M \notin S$ и $M \to M_0$ с внешней по отношению к D стороны S (*по* направлению выбранной нормали, поэтому w^+). Тогда в фиксированной точке $M_0 \in S$

$$w^-(M_0) = w(M_0) + 2\pi\nu(M_0), \tag{3.40}$$

$$w^+(M_0) = w(M_0) - 2\pi\nu(M_0), \tag{3.41}$$

где $w(M_0)$ — «прямое» значение потенциала при $M_0 \in S$.

Свойство 3.4 вытекает из (3.40), (3.41): $w^-(M_0) - w^+(M_0) = 4\pi\nu(M_0)$. Доказывать (3.40), (3.41) не будем. ■

Задача 3.1. Запишите (3.40), (3.41), выбрав нормаль к поверхности S, внешнюю по отношению к области D. ■

Решение *внутренней задачи* Дирихле (3.37) можно искать в виде $u(M) = w(M)$ с подлежащей определению плотностью ν. При $M \in S$ известно $w^-(M_0) = f(M)$, тогда условие одностороннего скачка (3.40) означает

$$\iint\limits_S \nu(P)\frac{\cos\varphi}{R_{PM}^2}dS_P + 2\pi\nu(M) = f(M),\ M \in S. \tag{3.42}$$

Уравнение (3.42) является интегральным уравнением Фредгольма второго рода относительно функции ν. Это уравнение однозначно разрешимо при любой $f \in C(S)$, поэтому существует решение задачи (3.37) в виде (3.31), (3.39).

Решая *внешнюю задачу* Дирихле, ищем регулярную на бесконечности гармоническую функцию $u(M)$. Такая функция, вообще говоря, стремится к нулю на бесконечности медленнее, чем потенциал двойного слоя. Поэтому в общем случае $u(M)$ нельзя представить в виде одного лишь потенциала двойного слоя; решение внешней задачи Дирихле можно искать в виде $u(M) = w(M) + A/R_{OM},\ A = \text{const},\ M \in \bar{D}' = \mathbb{R}^3 \setminus D$, где предполагается, что начало координат $O \in D$.

Для внешней задачи при $M \in S$ в прежних обозначениях известно $u^+(M) = w^+(M) + \dfrac{A}{R_{OM}} = f(M)$, тогда условие одностороннего скачка (3.41) означает

$$\iint\limits_S \nu(P)\frac{\cos\varphi}{R_{PM}^2}dS_P - 2\pi\nu(M) = f(M) - \frac{A}{R_{OM}},\ M \in S. \tag{3.43}$$

Необходимое и достаточное условие разрешимости интегрального уравнения Фредгольма (3.43) утверждает, что уравнение

(3.43) разрешимо в том и только в том случае, если его правая часть ортогональна каждому решению $\tilde{\mu}$ *союзного однородного уравнения*. Это позволяет выбрать постоянную:

$$A = \iint_S f(P)\tilde{\mu}(P)\,dS_P,$$

где $\iint_S \frac{\tilde{\mu}(P)}{R_{OP}}\,dS_P = 1.$ (3.44)

Удовлетворяющая условию нормировки (3.44) плотность $\tilde{\mu}$ называется *плотностью потенциала Робена*. Уравнение (3.43) разрешимо относительно ν при $f \in C(S)$, откуда и следует существование решения внешней задачи Дирихле.

3.9.3. Логарифмический потенциал двойного слоя

В двумерном случае в прежних обозначениях

$$w(M) = \int_S \nu(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\ln\frac{1}{R_{PM}}\right)dl_P = \int_S \nu(P)\frac{\cos\varphi}{R_{PM}}dl_P = \int_S \nu(P)\,d\omega_{PM},$$

где ω_{PM} — плоский угол, под которым из точки M виден элемент кривой dl_P.

Вместо (3.40), (3.41) теперь имеем равенства

$$w^-(M_0) = w(M_0) + \pi\nu(M_0),\ w^+(M_0) = w(M_0) - \pi\nu(M_0),$$

которые сводят внутреннюю и внешнюю задачи Дирихле к интегральным уравнениям.

3.9.4. Поверхностный потенциал простого слоя

Распределение заряда (или массы) по поверхности S можно охарактеризовать поверхностной плотностью $\mu(P)$: заряд элемента поверхности dS_P равен $\mu(P)\,dS_P$. В точке наблюдения M потенциал электростатического поля, созданного всей заряженной поверхностью S,

$$v(M) = \iint_S \frac{\mu(P)}{R_{PM}}\,dS_P. \qquad (3.30)$$

Функцию μ будем полагать непрерывной и ограниченной на S, а поверхность S — гладкой и удовлетворяющей некоторым дополнительным требованиям (поверхностью Ляпунова). Зави-

сящий от параметра M интеграл (3.30) собственный, если $M \notin S$, и несобственный, если $M \in S$.

Свойство 3.5. Потенциал простого слоя (3.30) определен всюду в $\mathbb{R}^3$, включая точки $M \in S$.

Доказательство при $M \in S$ следует из того, что μ ограничена, а $\iint\limits_S \dfrac{dS_P}{R_{PM}^{\alpha}}$ сходится при $\alpha < 2$. ■

Свойство 3.6. Потенциал (3.30) непрерывен всюду в $\mathbb{R}^3$, включая точки $M \in S$.

Свойство 3.7. В точках $M \notin S$ потенциал (3.30) есть гармоническая функция.

Доказательство следует из того, что при $M \notin S$ интеграл (3.30) собственный, а функция $\dfrac{1}{R_{PM}}$ гармонична по M. ■

Свойство 3.8. Если поверхность S ограничена и имеет конечную площадь, то $v(M) \underset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Доказательство следует из формулы среднего значения: $v(M) = \dfrac{1}{R_{P^*M}} \iint\limits_S \mu(P)\,dS_P$, $P^* \in S$, где $\iint\limits_S \mu(P)\,dS_P$ — суммарный заряд на S. ■

Свойство 3.9. Пусть S — замкнутая поверхность, ограничивающая конечную область D. Тогда в точках $M \in S$ нормальная производная потенциала (3.30) имеет разрыв первого рода со скачком, равным $4\pi\mu(M)$.

Данное свойство следует уточнить. Пусть $\mathbf{n}_{M_0}$ — *внутренняя* единичная нормаль к S, $M_0 \in S$. В точке $M \notin S$ рассмотрим $\dfrac{\partial v(M)}{\partial n_{M_0}} = \iint\limits_S \dfrac{\partial}{\partial n_{M_0}}\left(\dfrac{1}{R_{PM}}\right)\mu(P)\,dS_P$. Обозначим через ψ угол между векторами $\overrightarrow{PM}$ и $\mathbf{n}_{M_0}$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial n_{M_0}}\left(\frac{1}{R_{PM}}\right) = -\frac{1}{R_{PM}^2}\frac{\partial R_{PM}}{\partial n_{M_0}} = -\frac{\left(\operatorname{grad}_M R_{PM}, \mathbf{n}_{M_0}\right)}{R_{PM}^2} = -\frac{\cos\psi}{R_{PM}^2},$$

$$\frac{\partial v(M)}{\partial n_{M_0}} = -\iint\limits_S \frac{\cos\psi}{R_{PM}^2}\mu(P)\,dS_P. \tag{3.45}$$

Можно доказать, что интеграл (3.45) имеет смысл и для $M = M_0 \in S$ — «прямое» значение нормальной производной на S; при изменении M по поверхности S интеграл (3.45) есть непрерывная функция от M. В случае, когда $M = M_0 \in S$, введем обозначение $\left(\dfrac{\partial v(M)}{\partial n_M}\right)^0 = \iint\limits_S \dfrac{\partial}{\partial n_M}\left(\dfrac{1}{R_{PM}}\right)\mu(P)\,dS_P = -\iint\limits_S \dfrac{\cos\psi}{R_{PM}^2}\mu(P)\,dS_P$, где $\psi = \psi(M, P)$ — угол между $\overrightarrow{PM}$ и $\mathbf{n}_M$. Введем следующие обозначения: $\left(\dfrac{\partial v(M_0)}{\partial n_{M_0}}\right)^- = \lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{\partial v(M)}{\partial n_{M_0}}$ при условии, что $M \notin S$ и $M \to M_0$ с внутренней стороны S (*против* направления выбранной нормали); $\left(\dfrac{\partial v(M_0)}{\partial n_{M_0}}\right)^+ = \lim\limits_{M \to M_0} \dfrac{\partial v(M)}{\partial n_{M_0}}$ при условии, что $M \notin S$ и $M \to M_0$ с внешней стороны S (*по* направлению выбранной нормали). Тогда в фиксированной точке $M_0 \in S$

$$\left(\frac{\partial v(M_0)}{\partial n_{M_0}}\right)^+ = \left(\frac{\partial v(M_0)}{\partial n_{M_0}}\right)^0 + 2\pi\mu(M_0), \tag{3.46}$$

$$\left(\frac{\partial v(M_0)}{\partial n_{M_0}}\right)^- = \left(\frac{\partial v(M_0)}{\partial n_{M_0}}\right)^0 - 2\pi\mu(M_0). \tag{3.47}$$

Свойство 3.9 вытекает из (3.46), (3.47). ■

Задача 3.2. Запишите (3.46), (3.47), выбрав нормаль к поверхности S, *внешнюю* по отношению к области D. ■

Решения внутренней и внешней задач Неймана можно искать в виде потенциалов простого слоя с подлежащими определению плотностями.

Условие одностороннего скачка (3.47) является интегральным (см. (3.45)) уравнением Фредгольма второго рода относительно μ, к которому сводится *внутренняя задача* Неймана (3.38): при $M \in S$ известна нормальная производная $\left(\dfrac{\partial v(M)}{\partial n_M}\right)^- = g(M)$. Интегральное уравнение (3.47) разрешимо при условиях $g \in C(S)$, $\iint\limits_S g(P)\,dS_P = 0$, причем его общее решение имеет вид $\mu(M) + c\mu_0(M)$, где c — произвольная постоянная; μ_0 — нетривиальное

решение соответствующего *однородного* интегрального уравнения (при $g \equiv 0$). Отсюда следует существование решения задачи (3.38), если g удовлетворяет указанным условиям.

Внешняя задача Неймана также сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, которое выражает односторонний скачок (3.46). Интегральное уравнение (3.46) разрешимо для любой функции $g \in C(S)$, заданной в краевом условии (требование $\iint\limits_S g(P)\,dS_P = 0$ излишне). Поэтому в случае непрерывной функции g решение внешней задачи Неймана в пространстве существует и дается в виде потенциала простого слоя.

3.9.5. Логарифмический потенциал простого слоя

В двумерном случае потенциал простого слоя $v(M) = \int\limits_S \mu(P) \ln \dfrac{1}{R_{PM}}\,dl_P$, $M \in \mathbb{R}^2$, обладает свойствами 3.5, 3.6, 3.7 потенциала простого слоя в пространстве. При этом $\lim\limits_{M\to\infty} v(M) = 0$ тогда и только тогда, когда $\int\limits_S \mu(P)\,dl_P = 0$. Как и в случае потенциала двойного слоя, в условиях односторонних скачков (3.46), (3.47) постоянную 2π надо заменить на π.

Существование решения внутренней задачи Неймана доказывается аналогично пространственному случаю. Решение внешней задачи Неймана в $\mathbb{R}^2$ существует только, если $\oint\limits_S g(P)\,dl_P = 0$, поскольку *однородное* интегральное уравнение, союзное уравнению, к которому сводится внешняя задача Неймана, имеет постоянное нетривиальное решение.

3.9.6. Объемный потенциал

Пусть в точке P пространства находится заряд (или масса) e. В точке наблюдения M он создает электростатическое поле, потенциал которого $u(M) = \dfrac{e}{R_{PM}}$. Если в области D пространства распределены заряды с объемной плотностью $\rho(P)$, то в малóм объеме dD_P заключен заряд $\rho(P)\,dD_P$, который в точке M создает

потенциал $\dfrac{\rho(P)}{R_{PM}}dD_P$. Тогда потенциал, создаваемый в M всеми зарядами в D,

$$u(M)=\iiint\limits_D \frac{\rho(P)}{R_{PM}}dD_P. \tag{3.32}$$

Объемный потенциал (3.32) является интегралом, зависящим от параметра M. Если $M \notin D$, то интеграл (3.32) собственный; если $M \in D$, то несобственный. Будем полагать, что область D конечна, а плотность ρ ограничена и равна нулю вне D.

Свойство 3.10. Объемный потенциал (3.32) определен и непрерывен во всех точках $M \in \mathbb{R}^3$.

В доказательстве требуется обосновать равномерную сходимость интеграла (3.32) в окрестности точки $M \in D$. ■

Свойство 3.11. Объемный потенциал (3.32) всюду в $\mathbb{R}^3$ имеет непрерывные частные производные первого порядка по координатам точки M.

В *доказательстве* требуется обосновать законность дифференцирования интеграла (3.32) по координатам точки M под знаком интеграла. ■

Свойство 3.12. Объемный потенциал (3.32) является гармонической функцией вне области D: $\Delta u(M) = 0$ при $M \notin D$.

Доказательство следует из того, что при $M \notin D$ интеграл (3.32) собственный, и $\Delta_M \left(\dfrac{1}{R_{PM}}\right) = 0$. ■

Свойство 3.13. Если плотность $\rho \in C^1\left(\overline{D}\right)$, то в области D объемный потенциал (3.32) удовлетворяет уравнению Пуассона: $\Delta u(M) = -4\pi\rho(M)$ при $M \in D$.

В *доказательстве* требуется обосновать существование вторых производных потенциала (3.32) в D и вычислить $\Delta u(M)$ при $M \in D$. ■

Свойство 3.14. $\lim\limits_{M\to\infty} u(M) = 0$.

Доказательство следует из формулы среднего значения для интеграла (3.32) по ограниченной области:

$$u(M)=\frac{1}{R_{P^*M}}\iiint\limits_D \rho(P)dD_P,\ P^*\in D.$$

Очевидно, что $\iiint\limits_D \rho(P)dD_P$ — суммарный заряд в D. ■

3.9.7. Логарифмический потенциал

В плоском случае аналогом объемного потенциала (3.32) является логарифмический потенциал (3.36). Если $\rho\in C^1\left(\overline{D}\right)$, то потенциал (3.36) удовлетворяет в области D уравнению $\Delta u(M)=$ $=-2\pi\rho(M)$. Свойство 3.14 объемного потенциала для (3.36) не сохраняется.

3.10. Бигармонические функции

Определение 3.7. Функция $u(M)$ нескольких действительных переменных называется ***бигармонической функцией*** в области D, если в D она определена, имеет непрерывные частные производные до четвертого порядка включительно и удовлетворяет ***бигармоническому уравнению***

$$\Delta\Delta u(M)=0,\ M\in D. \tag{3.48}$$

С точки зрения приложений наибольшее значение имеют бигармонические функции двух переменных: $D\subset\mathbb{R}^2$. В декартовой системе координат Oxy $\Delta\Delta u(x,y)=\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}$.

Рассмотрим следующую краевую задачу: найти бигармоническую функцию $u(x,\ y)$ в ограниченной области $D\subset\mathbb{R}^2$, непрерывную вместе с производными первого порядка в $\overline{D}$ и удовлетворяющую на границе S области D краевым условиям

$$u(M)\big|_{M\in S}=f(M),\ \left.\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right|_{M\in S}=g(M), \tag{3.49}$$

где $M=M(x,\ y)$; $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ — производная по нормали к S; f и g — заданные непрерывные функции на контуре S. Классическое решение $u\in C^4\left(D\right)\cap C^1\left(\overline{D}\right)$.

Такая задача возникает в *плоской теории упругости* относительно функции напряжений: изучаются деформации упругой среды, картина которых одинакова во всех плоскостях, параллельных некоторой плоскости. Аналогичная теория рассматривает и задачи пространственного характера, например, об изгибе тонких пластинок (не мембран!). Статический прогиб $u(x, y)$ поверхности тонкой однородной упругой пластинки под действием распределенной по ее поверхности нормальной силы с поверхностной плотностью $F(x, y)$ удовлетворяет неоднородному бигармоническому уравнению

$$\Delta\Delta u(x, y) = \alpha F(x, y), \tag{3.50}$$

где постоянная α определяется толщиной пластинки и модулем Юнга.

Решение уравнения (3.50) следует подчинить краевым условиям, описывающим характер закрепления границы пластинки. В случае «заделанной» по краям пластинки на ее границе S должны выполняться условия

$$u(M)\big|_{M\in S} = 0, \quad \left.\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right|_{M\in S} = 0. \tag{3.51}$$

Изучение краевой задачи для линейного неоднородного уравнения (3.50) требует прежде всего выяснить, единственно ли решение задачи (3.48), (3.49). К задаче (3.48), (3.49) приводит и моделирование обтекания заданного контура S плоским течением однородной несжимаемой жидкости.

Теорема 3.19. Задача (3.48), (3.49) не может иметь более одного решения.

Доказательство. Пусть имеются два решения u_1, u_2 задачи (3.48), (3.49). Тогда функция $v = u_1 - u_2$ удовлетворяет уравнению (3.48) и краевым условиям (3.51). Во второй формуле Грина $\iint\limits_D (U\Delta V - V\Delta U)\,dxdy = \oint\limits_S \left(U\dfrac{\partial V}{\partial n} - V\dfrac{\partial U}{\partial n}\right)dl$ выберем функции

$V = v$, $U = \Delta v$.

Тогда $\iint\limits_D (\Delta v)^2\,dxdy = 0$, откуда $\Delta v = 0$ в D. Поскольку

$v(M)\big|_{M\in S} = 0$, из принципа максимума для гармонической функции v получаем $v \equiv 0$ в D. ■

3.11. Внутренние краевые задачи для уравнения Гельмгольца; случаи единственности и неединственности их решений

Записанное в канонической форме линейное уравнение эллиптического типа с *постоянными коэффициентами*

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + p_1 u_x + p_2 u_y + p_3 u_z + qu + G(x, y, z) = 0$$

можно заменой искомой функции

$$u(x,y,z) = v(x,y,z)\exp\{-\frac{1}{2}(p_1 x + p_2 y + p_3 z)\}$$

привести к виду

$$v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} + cv + F(x, y, z) = 0, \qquad (3.52)$$

где $c = q - \frac{1}{4}\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)$; $F(x,y,z) = G(x,y,z) \times \exp\{\frac{1}{2}(p_1 x + + p_2 y + p_3 z)\}$ (проверьте!).

Если $c = 0$, то (3.52) является уравнением Пуассона. При $c \neq \neq 0$ уравнение (3.52) называется ***уравнением Гельмгольца*** (см. п. 1.1.9).

В *ограниченной* области $D \subset \mathbb{R}^3$ (или $D \subset \mathbb{R}^2$) для уравнения Гельмгольца можно поставить те же задачи, что и для уравнений Лапласа и Пуассона, например, с краевыми условиями Дирихле, Неймана или с краевым условием третьего рода. При этом важно, совпадает или не совпадает коэффициент c уравнения (3.52) с каким-либо собственным значением оператора $-\Delta$ с соответствующим однородным краевым условием. Если число c является собственным значением однородной краевой задачи для уравнения Лапласа, то классическое решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца если существует, то заведомо неединственно. Если же число c отлично от собственных значений однородной краевой задачи для уравнения Лапласа, то классическое решение однородной или неоднородной краевой задачи для уравнения Гельмгольца единственно.

Пример 3.4. В прямоугольном параллелепипеде $D = \{0 < x < l_1, 0 < y < l_2, 0 < z < l_3\}$ найдем собственные значения и собственные функции оператора $-\Delta$ с краевым условием Дирихле. Собственные значения — это те значения параметра λ, при которых суще-

ствуют нетривиальные решения уравнения $v_{xx} + v_{yy} + v_{zz} + \lambda v = 0$ в D, удовлетворяющие краевому условию $v|_S = 0$ на границе S области D. Собственные функции этой задачи можно искать в виде $v(x, y, z) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$. Разделив уравнение на ненулевую функцию $X(x)\,Y(y)\,Z(z)$, получим $\dfrac{X''(x)}{X(x)} + \dfrac{Y''(y)}{Y(y)} + \dfrac{Z''(z)}{Z(z)} = -\lambda = \text{const}$. Отсюда $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\alpha = \text{const}$, $\dfrac{Y''(y)}{Y(y)} = -\beta = \text{const}$, $\dfrac{Z''(z)}{Z(z)} = -\gamma = \text{const}$, причем $\alpha + \beta + \gamma = \lambda$.

Используя краевое условие, получаем три задачи Штурма—Лиувилля на отрезках $0 \le x \le l_1$, $0 \le y \le l_2$, $0 \le z \le l_3$:

$$\begin{cases} X''(x) + \alpha X(x) = 0, \\ X(0) = 0, X(l_1) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} Y''(y) + \beta Y(y) = 0, \\ Y(0) = 0, Y(l_2) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_m(x) = \sin\left(\dfrac{\pi m}{l_1} x\right), \\ \alpha_m = \left(\dfrac{\pi m}{l_1}\right)^2, m = 1, 2, \ldots, \end{cases} \qquad \begin{cases} Y_n(y) = \sin\left(\dfrac{\pi n}{l_2} y\right), \\ \beta_n = \left(\dfrac{\pi n}{l_2}\right)^2, n = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z''(z) + \gamma Z(z) = 0, \\ Z(0) = 0, Z(l_3) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_k(z) = \sin\left(\dfrac{\pi k}{l_3} z\right), \\ \gamma_k = \left(\dfrac{\pi k}{l_3}\right)^2, k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Поэтому собственные значения $\lambda_{m,n,k} = \pi^2 \left(\dfrac{m^2}{l_1^2} + \dfrac{n^2}{l_2^2} + \dfrac{k^2}{l_3^2}\right)$, где m, n, k независимо друг от друга пробегают все натуральные числа. Каждому собственному значению $\lambda_{m,n,k}$ отвечает собственная функция $v_{m,n,k}(x, y, z) = \sin\left(\dfrac{\pi m}{l_1} x\right) \sin\left(\dfrac{\pi n}{l_2} y\right) \sin\left(\dfrac{\pi k}{l_3} z\right)$. Может случиться, что одно и то же собственное значение λ дается

разными наборами индексов m, n, k (например, если $l_1 = l_2 = l_3$), тогда этому λ отвечает несколько (*конечное число*) линейно независимых собственных функций. Собственные функции, отвечающие разным наборам индексов, ортогональны: $\iiint\limits_D v_{m,n,k}(x,y,z)v_{m'n'k'}(x,y,z)dxdydz = 0$, если $\{m,n,k\} \neq \{m',n',k'\}$.

Если в задаче для уравнения Гельмгольца

$$\begin{cases} \Delta v(x,y,z) + cv(x,y,z) = -F(x,y,z) \text{ в } D, \\ v|_S = f(x,y,z) \end{cases} \tag{3.53}$$

коэффициент c совпадает с некоторым $\lambda_{m,n,k}$, то, имея ее решение $v(x, y, z)$, можно построить решения $v(x, y, z) + \text{const}\, v_{m,n,k}(x, y, z)$. Если же c отлично от всех $\lambda_{m,n,k}$, то можно доказать единственность решения задачи (3.53) для уравнения Гельмгольца. ■

Пусть D — ограниченная область с кусочно-гладкой границей S, для которой выполнены формулы Грина (S является поверхностью Ляпунова). Задачу на собственные значения

$$\begin{cases} -\Delta v(M) = \lambda v(M), M \in D, \\ v|_S = 0 \end{cases} \tag{3.54}$$

можно свести к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода с параметром λ.

Из теории Фредгольма вытекают следующие свойства задачи (3.54):

• задача имеет бесконечное счетное множество собственных значений, у которого нет конечных предельных точек;

• все собственные значения вещественны и положительны;

• собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Если вместо краевого условия Дирихле в задаче (3.54) поставить краевое условие Неймана, то указанные свойства собственных функций и собственных значений сохранятся, но добавится собственное значение $\lambda = 0$.

3.12. Принцип Дирихле

3.12.1. Интеграл Дирихле и задача его минимизации

Мембраной называют однородную тонкую пленку, которая в покое занимает положение плоской ограниченной области $D \subset Oxy$. Ее площадь в состоянии покоя равна $\iint\limits_D dxdy$. Изогну-

тая мембрана находится в состоянии натяжения и обладает вследствие этого упругостью. Прогиб такой деформированной мембраны в направлении оси Oz описывается функцией $u(x, y)$ — смещением точки с координатами (x, y) в области D.

Будем рассматривать только случай, когда смещения деформированной мембраны вдоль Ox и Oy отсутствуют, внешние силы не действуют, а состояние мембраны стационарно — она неподвижна. Обычно полагают, что потенциальная энергия деформированной мембраны пропорциональна приращению площади.

Будем считать, что функция $u(x, y)$ достаточно гладкая, и все смещения малы, т. е. при вычислении площади деформированной мембраны можно пренебречь степенями величин u_x, u_y выше второй.

Тогда площадь деформированной мембраны

$$\iint\limits_{\overline{D}} \sqrt{1+\left(u_x\left(x,y\right)\right)^2+\left(u_y\left(x,y\right)\right)^2}\,dxdy \approx$$

$$\approx \iint\limits_{\overline{D}} \left[1+\frac{1}{2}\left(u_x\right)^2+\frac{1}{2}\left(u_y\right)^2\right]dxdy,$$

а ее потенциальная энергия пропорциональна величине

$$\Im(u)=\iint\limits_{\overline{D}} \left[\left(u_x\left(x,y\right)\right)^2+\left(u_y\left(x,y\right)\right)^2\right]dxdy,$$

которая называется ***интегралом Дирихле***. Интеграл Дирихле $\Im(u)$ является функционалом: функции u ставится в соответствие число.

Причиной деформации мембраны могут быть внешние силы или, например, фиксация ее границы в пространстве. Если внешние силы на мембрану не действуют, а ее изгиб определяется заданием положения ее границы, то для нахождения состояния упругого равновесия мембраны надо решить задачу о минимуме ее потенциальной энергии: $\Im(u) \to \min\limits_{u}$. Варьируя (изменяя) функцию $u(x, y)$ в задаче о минимуме, простыми рассуждениями можно доказать, что в положении равновесия такой мембраны ее прогиб $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta u(x, y) = 0$. Следовательно, для нахождения $u(x, y)$ надо решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа.

Возникает вопрос: можно ли задачу Дирихле для уравнения Лапласа решить сведением ее к задаче отыскания минимума $\Im(u)$ в некотором классе функций? Принцип, названный именем Ди-

рихле, утверждает эквивалентность этих двух задач. Пусть на границе S области D задана *непрерывная функция* μ. Рассмотрим задачу о минимизации $\Im(u)$. Допустим к сравнению все функции, непрерывные в $\overline{D}$ и кусочно-гладкие в D, которые на границе S совпадают с μ. Принцип Дирихле утверждает: задачу решает единственная допустимая функция u, на которой $\Im(u)$ достигает наименьшего значения. Эта функция имеет в D непрерывные вторые производные и гармонична в D.

Таким образом, решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа сводится к решению вариационной задачи Дирихле: найти допустимую функцию u, минимизирующую интеграл $\Im(u)$. Однако, как показал Вейерштрасс, дифференциальная первая краевая задача при некоторой *непрерывной функции* μ может иметь классическое решение, а соответствующая вариационная задача — нет: интеграл $\Im(u)$ на всех допустимых u обращается в бесконечность. Поэтому формулировку принципа Дирихле надо уточнить. Это уточнение было сделано Гильбертом и существенно развито С. Л. Соболевым.

Значение принципа Дирихле (в его различных модификациях) состоит в том, что он позволяет не только доказывать теоремы о существовании и единственности решений краевых задач, но и строить приближения к решениям в виде последовательностей допустимых функций, на которых значения $\Im(u)$ стремятся к $\min\limits_{u} \Im(u)$. Это важно для конструирования численных методов.

Замечание 3.20. С принципом Дирихле связан большой класс задач об отыскании ***минимальных поверхностей*** (так называют поверхность наименьшей площади, натянутую на заданную кривую). Если погрузить замкнутый проволочный контур в мыльный раствор, то образуется пленка, которая по закону поверхностного натяжения принимает в качестве своего положения равновесия форму минимальной поверхности, натянутой на контур. Теория минимальных поверхностей имеет не только математическое, но и важное прикладное значение. ■

3.12.2. Интеграл Дирихле в круге

Пусть $D = \{x^2 + y^2 < a\} = \{0 \le r < a, 0 \le \varphi < 2\pi\}$. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в указанном круге: $\Delta u = 0$ в D, $u\big|_{r=a} = \mu(\varphi)$. Метод разделения переменных в по-

лярных координатах r, φ дает решение этой задачи в виде ряда (см. п. 3.7.4):

$$u(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi), \qquad (3.55)$$

где $\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\xi)\cos n\xi\,d\xi$, $n=0,1,2,\ldots$, $\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\mu(\xi)\sin n\xi\,d\xi$, $n=1,2,\ldots$

Функцию μ будем полагать непрерывной на окружности $r=a$. Кроме того, будем полагать, что в любом круге $0\le r\le\rho$ радиуса $\rho<a$ функциональный ряд (3.55) можно почленно дифференцировать по r и по φ, и при этом будут получаться равномерно и *абсолютно* сходящиеся ряды, определяющие производные u_r и u_φ.

Введем зависящий от параметра ρ интеграл

$$\Im_\rho(u)=\iint\limits_{x^2+y^2\le\rho^2}\left[(u_x)^2+(u_y)^2\right]dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^{\rho}\left[(u_r)^2+\frac{1}{r^2}(u_\varphi)^2\right]rdrd\varphi,$$

где $u=u(r,\varphi)$; $x=r\cos\varphi$; $y=r\sin\varphi$. $\Im_a(u)$ является интегралом Дирихле в круге $\overline{D}$.

Если функция u гармонична в D, то внутри круга радиуса $\rho<a$ производные u_x, u_y непрерывны. Поэтому интеграл $\Im_\rho(u)$ собственный. Но при $\rho=a$ этот интеграл может оказаться несобственным, тогда под $\Im_a(u)$ надо понимать $\lim\limits_{\rho\to a}\Im_\rho(u)$. Вычислим $\Im_a(u)$ для функции u, определенной рядом (3.55).

При $\rho<a$ в круге $0\le r\le\rho$ имеем производные

$$u_r(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nr^{n-1}}{a^n}(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi),$$

$$u_\varphi(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n n(-\alpha_n\sin n\varphi+\beta_n\cos n\varphi).$$

Квадраты производных $(u_r)^2$ и $(u_\varphi)^2$ найдем, перемножая абсолютно сходящиеся ряды:

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nr^{n-1}}{a^n}(\alpha_n\cos n\varphi+\beta_n\sin n\varphi)\right]\left[\sum_{m=1}^{\infty}\frac{mr^{m-1}}{a^m}(\alpha_m\cos m\varphi+\beta_m\sin m\varphi)\right],$$

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n n(-\alpha_n\sin n\varphi+\beta_n\cos n\varphi)\right]\left[\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^m m(-\alpha_m\sin m\varphi+\beta_m\cos m\varphi)\right].$$

Затем почленным интегрированием рядов $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\ldots$ найдем $\int_0^{2\pi}(u_r)^2\,r\,d\varphi$ и $\int_0^{2\pi}(u_\varphi)^2\,\frac{1}{r}\,d\varphi$. Учтем при этом ортогональность системы функций $\{1,\cos n\varphi,\sin n\varphi\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда получим

$$\int_0^{2\pi}(u_r)^2\,r\,d\varphi=\int_0^{2\pi}(u_\varphi)^2\,\frac{1}{r}\,d\varphi=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left(\alpha_n^2+\beta_n^2\right)\frac{r^{2n-1}}{a^{2n}},$$

откуда

$$\Im_\rho(u)=\int_0^{\rho}\int_0^{2\pi}\left[(u_r)^2\,r+(u_\varphi)^2\,\frac{1}{r}\right]d\varphi\,dr=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n(\alpha_n^2+\beta_n^2)\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2n},$$

$$\Im_a(u)=\lim_{\rho\to a}\Im_\rho(u)=\pi\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\alpha_n^2+\beta_n^2\right),\qquad(3.56)$$

если ряд (3.56) сходится; $\Im_a(u)=+\infty$, если ряд (3.56) расходится.

Адамар предложил пример *непрерывной* на окружности $r=a$ функции $\mu(\varphi)$, при которой задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге D имеет классическое решение, но на этом решении интеграл Дирихле $\Im_a(u)=+\infty$. Функция $\mu(\varphi)$ задается равномерно сходящимся на отрезке $0\le\varphi\le2\pi$ рядом:

$$\mu(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n!\varphi)}{n^2}.\qquad(3.57)$$

Тогда гармоническая в D функция $u(r,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n!}\frac{\sin(n!\varphi)}{n^2}$ является классическим решением первой краевой задачи, но $\Im_a(u)=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^4}=+\infty$.

3.12.3. Экстремальное свойство гармонической функции

Если в краевом условии функция μ определена рядом (3.57) (или подобным ему рядом), то первую краевую задачу для уравнения Лапласа нельзя свести к задаче минимизации функционала $\Im_a(u)$. Дифференциальная и вариационная задачи не являются полностью эквивалентными. Сделать эти задачи эквивалентными можно, если не допускать неразрешимых вариационных задач. Для этого надо сузить класс функций μ в краевом условии, а тем самым — и класс допустимых функций в задаче

минимизации $\mathfrak{I}_a(u)$. Для решения дифференциальной краевой задачи такое ограничение не является необходимым.

Будем рассматривать только такие функции μ на границе S области D, которые являются значениями на S функции v, определенной в $\bar{D}$ и обладающей *конечным интегралом* Дирихле (говорят: «μ является *следом* на S определенной в $\bar{D}$ функции v, которая имеет конечный интеграл Дирихле»). Иными словами, будем полагать, что множество допустимых функций с конечным интегралом Дирихле не пусто.

Теорема 3.20. Пусть $v(r, \varphi)$ — непрерывная в круге $\bar{D} = \{0 \le r \le a\}$ кусочно-гладкая в D функция с конечным интегралом Дирихле. Пусть $\mu(\varphi) = v(a, \varphi)$. Если непрерывная в $\bar{D}$ функция $u(r, \varphi)$ гармонична в D и удовлетворяет краевому условию $u(a, \varphi) = \mu(\varphi)$, то $\mathfrak{I}_a(u) \le \mathfrak{I}_a(v)$.

Эта теорема выражает экстремальное свойство гармонических функций: если заданная на окружности $r = a$ функция $\mu(\varphi)$ имеет непрерывное и кусочно-гладкое продолжение $v(r, \varphi)$ внутрь круга, обладающее конечным интегралом Дирихле, то принимающая те же граничные значения *гармоническая функция* $u(r, \varphi)$ также имеет конечный интеграл Дирихле, не превышающий $\mathfrak{I}_a(v)$. Такая гармоническая функция единственна (докажите!).

Функция Адамара (3.57) не имеет продолжения внутрь круга с конечным интегралом Дирихле. В вариационной задаче множество допустимых функций с такими граничными значениями пусто.

Замечание 3.21. Вариационную задачу Дирихле можно рассматривать в более широком классе функций, чем класс кусочно-гладких в D функций. Наиболее естественно ее ставить в классе функций, имеющих в D первые *обобщенные производные*, квадрат которых интегрируем в D по Лебегу. ■

Замечание 3.22. Выбор круга в качестве области D является лишь удобным для изучения примером. ■

Задачи для самостоятельного решения

1. Для следующих функций $u = u(x, y, z)$ (x, y, z — декартовы координаты точки в пространстве) найдите $\operatorname{grad} u$ и $\operatorname{div} \operatorname{grad} u$:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ x^2+y^2+z^2 \neq 0;\ u_2 = \mathrm{e}^{xyz};$$

$$u_3 = \sin x \sin y \sin z,\ u_4 = \sin 3x \sin 4y\, \mathrm{sh}\, 5z.$$

Какие из указанных функций являются гармоническими?

2. Среди следующих функций $u = u(x, y)$ (x, y — декартовы координаты точки на плоскости) найдите гармонические:

$$u_1 = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ x^2+y^2 \neq 0;\ u_2 = x^2 - y^2 + xy;$$

$$u_3 = \frac{x}{x^2+y^2},\ x^2+y^2 \neq 0;\ u_4 = \cos x\, \mathrm{sh} y - \mathrm{sh}\, x \sin y;$$

$$u_5 = \mathrm{e}^{y/x},\ x \neq 0;\ u_6 = e^{xy};\ u_7 = e^{x^2+y^2};\ u_8 = v^2(x, y),$$

где $v(x, y)$ — гармоническая функция; $v \neq \mathrm{const}$.

3. Пусть r, θ, φ — сферические координаты в пространстве. Функция $u = \dfrac{1}{r}$ называется *фундаментальным решением* уравнения Лапласа в пространстве. Покажите, что $\dfrac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме начала координат. Дайте электростатическую интерпретацию этому решению.

4. Пусть r, φ — полярные координаты на плоскости Oxy. Функция $u = \ln\dfrac{1}{r}$ называется фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости. Покажите, что $\ln\dfrac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме начала координат. Дайте электростатическую интерпретацию этому решению.

Указание. Пусть ось Oz декартовой системы координат в пространстве равномерно заряжена с постоянной линейной плотностью заряда e (т. е. заряд, приходящийся на единицу длины оси, равен e). Зависит ли напряженность $\mathbf{E}$ создаваемого всей осью Oz электростатического поля в точке (x, y, z) в вакууме от координаты z? От чего зависит напряженность этого поля? Нарисуйте вектор $\mathbf{E}$. Выберите точку P на расстоянии r от оси Oz и произвольный малый промежуток на оси Oz длиной dz. Найдите напряженность $\mathbf{E}_{dz}$ поля в точке P, создаваемого выбранным промежутком dz; составляющую вектора $\mathbf{E}_{dz}$, перпендикулярную оси Oz; величину вектора $\mathbf{E}$, интегрируя по всей оси Oz. Вспомните, что $\mathbf{E} = -\mathrm{grad} u$, где u — потенциал электростатического поля. Запишите вектор $\mathrm{grad} u$ в рассматриваемом осесимметричном случае в цилиндрической системе координат. Определите потенциал $u(r)$ равномерно заряженной оси Oz.

5. Разрешима ли задача для функции $u(r, \varphi)$:

$$\Delta u = 0;\ 0 \le r < a,\ 0 \le \varphi < 2\pi,$$

r, φ — полярные координаты на плоскости;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi?$$

6. Найдите функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую задаче

$$\Delta u = 0,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b,$$

$$u\big|_{y=0} = \sin\frac{\pi x}{a}, 0 \le x \le a; u\big|_{x=a} = 0, 0 \le y \le b,$$

$$u\big|_{y=b} = 0, 0 \le x \le a; u\big|_{x=0} = \sin\frac{\pi y}{b}, 0 \le y \le b.$$

7. Найдите функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую задаче

$$\Delta u = 0,\ 0 < x < a,\ 0 < y < b,$$

$$u\big|_{y=0} = \sin\frac{\pi x}{a}, 0 \le x \le a, u\big|_{x=a} = 0, 0 \le y \le b,$$

$$u\big|_{y=b} = \sin\frac{2\pi x}{a}, 0 \le x \le a; u\big|_{x=0} = 0, 0 \le y \le b.$$

8. Найдите функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую задаче

$$\Delta u = 0, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2},$$

$$u\big|_{y=-\frac{\pi}{2}} = 0, u\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \sin(2y),$$

$$u\big|_{y=\frac{\pi}{2}} = \sin(4x), u\big|_{x=-\frac{\pi}{2}} = 0.$$

9. Решите смешанную краевую задачу:

$$\Delta u = 0,\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \sin 2x, 0 < x < \pi; u\big|_{x=\pi} = \cos 2y, 0 \le y \le \pi;$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\pi} = \sin 3x, 0 < x < \pi; u\big|_{x=0} = 0, 0 \le y \le \pi.$$

10. Найдите функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую задаче

$$\Delta u = \sin\frac{5\pi x}{a}\sin\frac{6\pi y}{b}, 0 < x < a, 0 < y < b,$$

$$u\big|_{y=0} = \sin\frac{\pi x}{a}, 0 \le x \le a; u\big|_{x=a} = \sin\frac{2\pi y}{b}, 0 \le y \le b,$$

$$u\big|_{y=b} = \sin\frac{3\pi x}{a}, 0 \le x \le a; u\big|_{x=0} = \sin\frac{4\pi y}{b}, 0 \le y \le b.$$

Указание. Подбором найдите какое-нибудь частное решение $U(x, y)$ неоднородного уравнения, а затем выполните замену искомой функции: $u = v + U$.

11. Найдите функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую задаче

$$\Delta u = \sin 2x, 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < +\infty,$$

$$u\big|_{x=0} = 0, 0 \le y < +\infty; u\big|_{y=0} = \sin 4x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, u\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0, 0 \le y < +\infty.$$

12. Решите задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге $0 \le r \le 1$ с заданными краевыми условиями:

$$u\big|_{r=1} = \sin 3\varphi; u\big|_{r=1} = \sin^2\varphi; u\big|_{r=1} = \cos^2\varphi.$$

13. Решите задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге $0 \le r \le 1$ с заданными краевыми условиями:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \sin\varphi; \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \sin\varphi + \cos\varphi; \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=1} = \cos^2\varphi.$$

14. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа вне круга $0 \le r \le 1$ с краевым условием $u\big|_{r=1} = \cos\varphi$.

15. Решите задачу Неймана для уравнения Лапласа вне круга $0 \le r \le 1$ с краевым условием $\left.\frac{\partial u}{\partial(-r)}\right|_{r=1} = \cos\varphi$.

16. Найдите функцию $u(r, \varphi)$, гармоническую в кольце $0 < a < r < b$ и непрерывно примыкающую к краевым условиям $u\big|_{r=a} = 1 + \cos^2\varphi$, $u\big|_{r=b} = \sin^2\varphi$.

17. Решите задачу Дирихле для уравнения Пуассона в круге $0 \le r \le a$:

$$\Delta u = \sin\varphi,\ 0 \le r < a,\ 0 \le \varphi < 2\pi;$$

$$u(a, \varphi) = a^2\sin 2\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Указание. Частное решение уравнения $r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = r^2\sin\varphi$ можно искать в виде $Ar^2\sin\varphi$, $A = \text{const}$. Подставьте это выражение в уравнение и определите постоянную A. Запишите задачу для новой функции v и решите ее.

18. Найдите функцию $u(r, \varphi)$, удовлетворяющую задаче

$$\Delta u = 1,\ 0 < a < r < b,\ 0 \le \varphi < 2\pi;$$

$$u(a, \varphi) = a^2\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi;\ u(b, \varphi) = b^2\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Указание: ищите частное решение вида $U(r, \varphi) = Ar^2$, $A = \text{const}$.

19. В декартовой системе координат Oxy

$$\Delta u(x, y) = 0,\ 0 < x < +\infty,\ 0 < y < +\infty,$$
$$u(x, 0) = 0,\ 0 < x < +\infty,\ u(0, y) = 1,\ 0 < y < +\infty.$$

Найдите $u(x, y)$.

Указание. Решите эту задачу в полярной системе координат.

20. Методом зеркальных изображений постройте функцию Грина задачи Дирихле в полупространстве:

$\Delta u(x, y, z) = 0,\ -\infty < x < +\infty,\ 0 < y < +\infty,\ -\infty < z < +\infty;$

$u\big|_{y=0} = \mu(x, z)$; $u(x, y, z)$ при $r \to +\infty$ равномерно стремится к нулю,

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Указание. От функции Грина в неограниченной области надо потребовать: $G(M, M_0)$ при $M \to \infty$ равномерно стремится к нулю. Запишите интегральное представление решения задачи Дирихле. В случае $\mu(x, z) \equiv \mu(x)$ в полученном решении вычислите интеграл по переменной z и запишите интегральное представление решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < +\infty$.

21. Найдите функцию Грина задачи Дирихле и опишите дальнейшую процедуру построения решения этой задачи для уравнения Пуассона в следующих четырех областях пространства:

1) $y > 0$, $z > 0$; 2) $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$;

3) $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, $0 < z < 1$; 4) $x^2 + y^2 + z^2 < a^2$.

22. Найдите функцию Грина задачи Дирихле и опишите дальнейшую процедуру построения решения этой задачи для уравнения Пуассона в следующих четырех областях плоскости:

1) $x > 0$, $y > 0$; 2) $0 < x < 1$, $0 < y < 1$;

3) $x^2 + y^2 < a^2$; 4) $x^2 + y^2 < a^2$; $y > 0$.

23. Запишите интегральное представление решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в круге $0 \le r \le a$. Сравните полученное решение с решением, построенным методом разделения переменных.

24. Пусть S — замкнутая гладкая двусторонняя поверхность; $\mathbf{n}$ — поле внутренних нормалей ($\mathbf{n}$ направлена внутрь области D, ограниченной поверхностью S); $\nu = \nu_0 = \text{const}$ — постоянная плотность распределения дипольного момента на S. Найдите потенциал $w(M)$ двойного слоя этой поверхности.

25. В полупространстве $z \ge 0$ в $Oxyz$ найдите решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в виде потенциала двойного слоя.

26. Найдите логарифмический потенциал двойного слоя отрезка $-a \le x \le a$ на Oxy с постоянной плотностью ν_0.

27. В полуплоскости $y \ge 0$ на Oxy найдите решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в виде логарифмического потенциала двойного слоя.

28. Найдите решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге в виде логарифмического потенциала двойного слоя. Запишите это решение в виде интеграла Пуассона.

29. Найдите потенциал простого слоя сферы с постоянной плотностью μ_0.

30. Найдите логарифмический потенциал простого слоя отрезка $-a \le x \le a$ на Oxy с постоянной плотностью μ_0.

31. Найдите объемный потенциал шара с постоянной плотностью ρ_0.

32. Пусть функции $v(x, y)$, $w(x, y)$ гармоничны в области $D \subset \mathbb{R}^2$ (в декартовой системе координат Oxy). Докажите, что функция $u(x, y) = xv(x, y) + w(x, y)$ бигармонична в D.

33. Найдите собственные значения и собственные функции.

$$-\Delta v(x, y) = \lambda v(x, y) \text{ в } D = \{0 < x < l_1, 0 < y < l_2\},$$

$$v_x(0, y) = 0,\ v_x(l_1, y) = 0,\ 0 < y < l_2,$$

$$v_y(x, 0) = 0,\ v_y(x, l_2) = 0,\ 0 < x < l_1.$$

В каких случаях задача Неймана для уравнения Гельмгольца имеет в D единственное (неединственное) решение?

34. В случае сферической симметрии ($v = v(r)$) найдите собственные значения и собственные функции задачи

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda v \text{ в шаре } 0 \le r < a, \\ v\big|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

В смысле какого скалярного произведения собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны?

Решите задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$\begin{cases} \Delta v + c \cdot v = 0 \text{ в шаре } 0 \le r < a, \\ v\big|_{r=a} = v_0 = \text{const}. \end{cases}$$

35. Решите задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$\begin{cases} \Delta v + cv = F_0 = \text{const в шаре } 0 \le r < a, \\ v\big|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

36. При $p > 1$ решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге:

$$\begin{cases} \Delta u(r, \varphi) = 0,\ \ 0 \le r < a,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi, \\ u(a, \varphi) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(n^4 \varphi\right)}{n^p},\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Найдите $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2 \le a^2} \left[(u_x)^2 + (u_y)^2\right] dx dy$ для полученного решения. При каких p решение $u(r, \varphi)$ можно построить, минимизируя интеграл Дирихле?

Глава 4

ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Волновое уравнение $u_{tt}(M,t) = a^2 \Delta_M u(M,t) + f(M,t)$ описывает малые колебания, его решение зависит от точки $M(x, y, z)$ в пространстве и от времени t. Это уравнение гиперболического типа.

Область изменения пространственных переменных в $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$ будем обозначать через D, а ее границу — через S.

Для выделения конкретного волнового процесса нужна дополнительная информация об искомой функции $u(M, t)$. Желательно, чтобы такая информация приводила к корректной постановке задачи нахождения $u(M, t)$.

4.1. Задача Коши для уравнения колебаний бесконечной струны. Формула Даламбера. Корректность задачи Коши

4.1.1. Классическое решение задачи Коши на прямой. Формула Даламбера

Изучение простейших волновых процессов начнем с задачи с начальными данными для уравнения

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t) \tag{4.1}$$

с одной пространственной переменной x и временем t. В этом случае область $D = \{-\infty < x < +\infty\}$, $S = \varnothing$, $t \geq 0$. Величину $u(x, t)$ удобно интерпретировать как поперечное (в плоскости Oxz в направлении оси Oz) смещение в момент времени t той точки бесконечной струны, которая в состоянии покоя имела координаты $(x, 0, 0)$ в $Oxyz$ (покоящаяся струна совпадает с Ox). Величина $a = \text{const} > 0$.

Задача Коши для уравнения колебаний (4.1) состоит в нахождении решения (4.1) при заданных начальном отклонении струны $u(x,0)$ и ее начальной поперечной скорости $u_t(x,0)$:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases} \tag{4.2}$$

Определение 4.1. ***Классическим решением*** задачи Коши (4.2) называется функция $u(x,\ t)$, определенная и непрерывная вместе со своей первой производной $u_t(x,\ t)$ в области $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$, имеющая непрерывные производные $u_{tt}(x,\ t)$ и $u_{xx}(x,\ t)$ в области $-\infty < x < +\infty$, $t > 0$, удовлетворяющая уравнению колебаний и заданным начальным условиям.

Замечание 4.1. Прямая $t = 0$, на которой заданы начальные данные φ и ψ, не является характеристикой уравнения (4.1). ■

В силу линейности задачи (4.2) ее решение можно представить в виде суммы решений двух задач:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty \end{cases} \tag{4.3}$$

и

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0; \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases} \tag{4.4}$$

Рассмотрим сначала задачу (4.3). Предположим, что существует ее классическое решение. Заменой независимых переменных приведем уравнение свободных колебаний в (4.3) к его первой канонической форме, содержащей смешанную производную. Для этого запишем дифференциальное уравнение характеристик $(dx)^2 - a^2(dt)^2 = 0$ и найдем его интегралы. Поскольку $dx - adt = 0$, $dx + adt = 0$, имеем два семейства характеристик: $x - at = C_1 = \text{const}$ и $x + at = C_2 = \text{const}$ (на плоскости Oxt это два семейства параллельных прямых). Введем новые переменные $\zeta = x - at$ и $\eta = x + at$. В результате замены переменных уравнение свободных колебаний приводится к виду $U_{\zeta\eta}(\zeta,\ \eta) = 0$, где $U(\zeta,\ \eta) = u(x(\zeta,\ \eta),\ t(\zeta,\ \eta))$. Легко найти общее решение этого уравнения:

$$U_\zeta(\zeta,\eta) = \tilde{f}(\zeta), \quad U(\zeta,\eta) = \int \tilde{f}(\zeta)d\zeta + f_2(\eta) = f_1(\zeta) + f_2(\eta),$$

где f_1 и f_2 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Вернемся к прежним переменным: $u(x,\ t) = f_1(x - at) + f_2(x + at)$. Последнее равенство означает, что общее решение уравнения свободных колебаний представляет собой сумму волны f_1, распространяющейся слева направо по оси Ox со скоростью a, и волны f_2, распространяющейся с той же скоростью a справа налево. Профили волн f_1 и f_2 со временем не деформируются, поскольку в рассматриваемой модели колебаний не учитывается трение и другие искажающие факторы; происходит только смещение профилей волн со скоростью a вдоль Ox и их сложение (для более реалистического описания колебаний следовало бы учесть, например, силу трения, пропорциональную скорости $u_t(x,\ t)$).

Замечание 4.2. Уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ не меняется при замене времени t на $-t$. Этим выражается обратимость механических волновых процессов во времени (как будут двигаться волны $f_1(x - at)$ и $f_2(x + at)$, если t заменить на $-t$?) ■

Выделить конкретное решение уравнения свободных колебаний можно, например, с помощью начальных условий задачи (4.3). Определим функции f_1 и f_2 из системы уравнений

$$\begin{cases} u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ u_t(x,0) = -af_1'(x) + af_2'(x) = \psi(x), \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty, \quad (4.5)$$

где штрих означает производную по полному аргументу функции одной переменной.

Интегрируя второе уравнение, получаем

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ -f_1(x) + f_2(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\,d\xi + C, C = \text{const}, \end{cases}$$

откуда

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\,d\xi - \frac{C}{2},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x} \psi(\xi)\,d\xi + \frac{C}{2}.$$

Следовательно,

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi. \quad (4.6)$$

Формула (4.6) называется формулой Даламбера.

4.1.2. Корректность задачи Коши

Теорема 4.1. Пусть в (4.3) функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, а функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема при $-\infty < x < +\infty$. Тогда классическое решение задачи (4.3) существует, единственно и определяется формулой Даламбера (4.6).

Доказательство. Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям теоремы, то непосредственной проверкой устанавливаем, что заданная формулой (4.6) функция $u(x,\, t)$ является классическим решением задачи (4.3). Система (4.5) определяет вид решения (4.6) однозначно.■

Рассмотрим наряду с задачей (4.3) задачу

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}(x,t) = a^2 \tilde{u}_{xx}(x,t),\ -\infty < x < +\infty,\ t > 0; \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \tilde{u}_t(x,0) = \tilde{\psi}(x),\ -\infty < x < +\infty. \end{cases} \tag{4.7}$$

Теорема 4.2. При любом конечном $T > 0$ для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon,\, T) > 0$, что если функции $\varphi, \tilde{\varphi}, \psi, \tilde{\psi}$ в задачах (4.3) и (4.7) удовлетворяют неравенствам

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} \left|\varphi(x) - \tilde{\varphi}(x)\right| < \delta, \quad \sup_{-\infty<x<+\infty} \left|\psi(x) - \tilde{\psi}(x)\right| < \delta, \tag{4.8}$$

то решения задач (4.3) и (4.7) удовлетворяют неравенству

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} \left|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)\right| < \varepsilon \tag{4.9}$$

при $0 \le t \le T$.

Доказательство. Из формулы Даламбера (4.6) следует неравенство

$$\left|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)\right| \le \frac{1}{2}\left|\varphi(x-at) - \tilde{\varphi}(x-at)\right| +$$

$$+\frac{1}{2}\left|\varphi(x+at) - \tilde{\varphi}(x+at)\right| + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \left|\psi(\xi) - \tilde{\psi}(\xi)\right| d\xi.$$

Тогда из (4.8) получаем

$$\left|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)\right| \le \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a} 2at\delta = \delta(1+t).$$

Если решения задач (4.3) и (4.7) рассматриваются только на отрезке времени $0 \le t \le T$, то на этом отрезке времени выполнено неравенство (4.9), если $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+T}$. ■

Существование, единственность и устойчивость решения задачи Коши (4.3) означают, что эта задача *корректно поставлена.*

4.1.3. Множество зависимости решения от начальных условий

Если в формуле Даламбера (4.6) фиксировать момент времени $t_0 > 0$, то функция $u(x, t_0)$ даст профиль струны в этот момент времени — «мгновенную фотографию» струны. Если в (4.6) фиксировать x_0, то функция $u(x_0, t)$ даст закон движения точки струны с координатой x_0.

Фиксируем точку x_0 и момент времени $t_0 > 0$ и зададимся вопросом: все ли значения функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ на прямой $-\infty < x < +\infty$ необходимы для того, чтобы найти $u(x_0, t_0)$ по формуле (4.6)? Для ответа на этот вопрос снова используем плоскость Oxt. Характеристики уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ — это прямые $x - at = \text{const}$ и $x + at = \text{const}$ на Oxt. Если g — функция одной переменной, то сложная функция $g(x - at)$ сохраняет постоянное значение вдоль характеристики $x - at = \text{const}$, а сложная функция $g(x + at)$ сохраняет постоянное значение вдоль характеристики $x + at = \text{const}$. Проведем через точку $M(x_0, t_0)$ на плоскости Oxt две характеристики: $x - at = x_0 - at_0$ и $x + at = x_0 + at_0$. Пусть B и C — точки их пересечения с осью Ox; $B = B(x_0 - at_0, 0)$; $C = C(x_0 + at_0, 0)$. Треугольник MBC называется характеристическим. Формула Даламбера (4.6) утверждает, что для нахождения $u(x_0, t_0)$ достаточно знать только $\varphi(x_0 - at_0)$, $\varphi(x_0 + at_0)$ — начальные отклонения в точках B и C и $\psi(x)$ при $x_0 - at_0 \le x \le x_0 + at_0$ — начальную скорость на отрезке BC.

Для описания распространения волн важно знать *множество зависимости* решения от начальных условий. Введем это понятие, сравнивая решение $u(x, t)$ задачи (4.3) с решением $\tilde{u}(x,t)$ задачи (4.7). Пусть начальные данные $\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\psi}(x)$ в (4.7) отличаются от начальных данных $\varphi(x)$, $\psi(x)$ в (4.3) только на некотором множестве Ω области $D = \{-\infty < x < +\infty\}$. В каких точках плоскости Oxt заведомо будет $\tilde{u}(x,t) = u(x,t)$, а в каких точках этой плоскости $\tilde{u}(x,t)$ *может* отличаться от $u(x, t)$? Множество точек $(x, t) \in Oxt$, где решение $\tilde{u}(x,t)$ *может* отличаться от $u(x, t)$, если начальные данные в задаче (4.3) изменить только на Ω, называется множеством зависимости решения задачи Коши

от значений начальных данных на Ω. Множество зависимости является дополнением до Oxt множества независимости решения $u(x,\,t)$ от начальных данных на Ω. В силу линейности задач (4.3) и (4.7) можно считать, что $\varphi(x)\equiv 0,\ \psi(x)\equiv 0$, и тогда $u(x,t)\equiv 0$. При этом положим $\tilde{\varphi}(x)=0$ и $\tilde{\psi}(x)=0$ для $x\notin\Omega$ и $\tilde{\varphi}(x)\neq 0$ и/или $\tilde{\psi}(x)\neq 0$ для $x\in\Omega$. В каких точках $(x,t)\in Oxt$ заведомо будет $\tilde{u}(x,t)=0$, а в каких точках это равенство необязательно? В рассматриваемом случае одной пространственной переменной ответ на этот вопрос дается по-разному для зависимости решения от начального отклонения и для зависимости решения от начальной скорости.

Пример 4.1. Пусть $\psi(x)\equiv 0$, $\varphi(x)>0$ на открытом интервале $\Omega=\{-l<x<l\}$ оси Ox и $\varphi(x)=0$ вне Ω. На плоскости Oxt через точку $(-l,\,0)$ проходят характеристики $x+at=-l$ и $x-at=-l$ (т.е. $t=\dfrac{-x-l}{a}$ и $t=\dfrac{x+l}{a}$), а через точку $(l,\,0)$ проходят характеристики $x+at=l$ и $x-at=l$ (т.е. $t=\dfrac{-x+l}{a}$ и $t=\dfrac{x-l}{a}$). Рассматриваем только полуплоскость $t\geq 0$ на Oxt. Значение $u(x,\,t)$ для каждой точки $(x,\,t)$ этой полуплоскости легко найти с помощью характеристического треугольника. В полуплоскости $t\geq 0$ точки $(x,\,t)$, для которых $x\leq -l-at$, не входят в множество зависимости решения от значений φ на Ω: волна $f_2(x+at)$, распространяющаяся из-за начального возмущения на Ω влево со скоростью a вдоль оси Ox, за время t еще не достигнет точек на Ox с такими координатами x; для них $u(x,\,t)=0$. Точно так же точки, удовлетворяющие неравенству $x\geq l+at$, не входят в множество зависимости: сюда еще не успела дойти волна $f_1(x-at)$; $u(x,\,t)=0$. Треугольная область $\{-l+at<x<l-at,\,t>0\}$ входит в множество зависимости: здесь $u(x,t)=\dfrac{1}{2}\big(\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\big)$. Полуполоса $\{-l-at<x<l-at,\,x\leq -l+at\}$ входит в множество зависимости: здесь $u(x,t)=\dfrac{1}{2}\varphi(x+at)$. Полуполоса $\{-l+at<x<l+at,\,x\geq l-at\}$ входит в множество зависимости: $u(x,t)=\dfrac{1}{2}\varphi(x-at)$. Наконец, точки, удовлетворяющие неравенствам $l-at<x<-l+at$, не принадлежат множеству зависимо-

сти: здесь волны уже прошли, не оставив каких-либо возмущений, поэтому $u(x,\ t) = 0$. Итак, множеством зависимости решения от значений φ на Ω является $\{at - l < |x| < at + l, t > 0\}$. ■

Пример 4.2. Пусть $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) > 0$ на $\Omega = \{-l < x < l\}$ и $\psi(x) = 0$ вне Ω. В множество зависимости решения от значений ψ на Ω не входят точки, удовлетворяющие неравенствам $x \leq -l - at$ или $x \geq l + at$: сюда волны дойти не успели, и поэтому $u(x,\ t) = 0$. Остальные точки полуплоскости $t \geq 0$ принадлежат множеству зависимости. В области $\{-l + at < x < l - at,\ t > 0\}$ решение имеет вид $u(x,t) = \dfrac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)d\xi$. В полуполосе $\{-l - at < x < l - at,$ $x \leq -l + at\}$ решение имеет вид $u(x,t) = \dfrac{1}{2a}\int\limits_{-l}^{x+at} \psi(\xi)d\xi$, а в полуполосе $\{-l + at < x < l + at,\ x \geq l - at\}$ решение имеет вид $u(x,t) = \dfrac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{l} \psi(\xi)d\xi$. В точках $(x,\ t)$, удовлетворяющих неравенствам $l - at < x < -l + at$, получаем остаточный сдвиг: $u(x,t) = \dfrac{1}{2a}\int\limits_{-l}^{l} \psi(\xi)d\xi = \text{const}$. Множеством зависимости решения от значений ψ на Ω является $\{|x| < at + l, t > 0\}$. ■

4.1.4. Решение задачи Коши для неоднородного уравнения

Решим задачу (4.4) для *неоднородного* уравнения, т.е. в случае вынужденных колебаний.

Теорема 4.3. Пусть функция $f(x,\ t)$ в (4.4) непрерывна и имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ в области $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$. Тогда задача (4.4) имеет единственное классическое решение:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau. \qquad (4.10)$$

Доказательство. Найдем $u_x(x,\ t)$ и $u_{xx}(x,\ t)$, дифференцируя зависящий от параметра x интеграл (4.10) по формуле Лейбница:

$$u_x(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\left(f(\xi,\tau)\big|_{\xi=x+a(t-\tau)}-f(\xi,\tau)\big|_{\xi=x-a(t-\tau)}\right)d\tau,$$

$$u_{xx}(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\left(\left.\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=x+a(t-\tau)}-\left.\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=x-a(t-\tau)}\right)d\tau.$$

Найдем $u_t(x,\ t)$ и $u_{tt}(x,\ t)$, дифференцируя зависящий от параметра t интеграл (4.10) по формуле Лейбница:

$$u_t(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t\left(f(\xi,\tau)\big|_{\xi=x+a(t-\tau)}+f(\xi,\tau)\big|_{\xi=x-a(t-\tau)}\right)d\tau,$$

$$u_{tt}(x,t)=f(x,t)+\frac{a}{2}\int_0^t\left(\left.\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=x+a(t-\tau)}-\left.\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=x-a(t-\tau)}\right)d\tau.$$

Подставляя полученные выражения производных $u_{tt}(x,\ t)$ и $u_{xx}(x,\ t)$ в уравнение, а $u(x,\ t)$ и $u_t(x,\ t)$ — в начальные условия задачи (4.4), убеждаемся в том, что (4.10) является решением задачи Коши (4.4). Если бы существовали два различных решения $u_1(x,\ t)$ и $u_2(x,\ t)$ задачи (4.4), то функция $w(x,\ t)=u_1(x,\ t)-u_2(x,\ t)$ удовлетворяла бы задаче

$$\begin{cases}w_{tt}(x,t)=a^2w_{xx}(x,t),\ -\infty<x<+\infty,\ t>0,\\ w(x,0)=0,\ w_t(x,0)=0,\ -\infty<x<+\infty.\end{cases}$$

Но по теореме единственности решения последней задачи нет решений, отличных от $w(x,\ t)\equiv 0$. ■

Теорема 4.4. Решение задачи (4.4) на любом конечном отрезке времени $0\le t\le T$ устойчиво по отношению к возмущениям функции $f(x,\ t)$.

Доказательство. При любом конечном $T>0$ для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon,T)=\dfrac{2\varepsilon}{T^2}$, что если $\sup\limits_{\substack{-\infty<x<+\infty\\0<t\le T}}\left|f(x,t)-\tilde f(x,t)\right|<\delta$,

то $\left|\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}\left(f(\xi,\tau)-\tilde f(\xi,\tau)\right)d\xi\,d\tau\right|<\delta\dfrac{t^2}{2}\le\delta\dfrac{T^2}{2}=\varepsilon.$

Это и означает устойчивость решения задачи (4.4) на отрезке времени $0 \le t \le T$. ■

При выполнении условий теорем существования и единственности классических решений задач (4.3) и (4.4) получаем классическое решение задачи (4.2) в виде формулы Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \\ + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha)d\alpha + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

4.1.5. Примеры обобщенных решений задачи Коши

Требования к заданным функциям φ, ψ, f могут быть ослаблены, если решение задачи Коши понимать в некотором *обобщенном смысле*.

Пример 4.3. Если в задаче (4.3) $\varphi(x) = \begin{cases} 1-|x|, |x| \le 1, \\ 0, |x| \ge 1, \end{cases}$ а $\psi(x) \equiv 0$, то классического решения этой задачи не существует. Но можно построить решение в смысле предела классических решений. Для этого выберем последовательность достаточно гладких функций $\varphi_n(x)$, равномерно сходящуюся к $\varphi(x)$ на $-\infty < x < +\infty$. Найдем классические решения $u_n(x, t)$ задач Коши с начальными данными φ_n, ψ. Решением исходной задачи назовем $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x,t)$.

Такое решение для заданных φ и ψ можно получить по формуле Даламбера (4.6). ■

Пример 4.4. Если в задаче (4.3) $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) = \begin{cases} V = \text{const} \ne 0, |x| \le l, \\ 0, |x| > l, \end{cases}$ то классического решения этой задачи не существует (такие начальные условия означают, что в начальный момент времени струне был ударом передан равномерно распределенный на $|x| \le l$ импульс $I = 2l\rho V$, где $\rho = \text{const}$ — линейная плотность массы струны). Последовательность гладких функций $\psi_n(x)$ не может *равномерно* сходиться к *разрывной* функции $\psi(x)$. Поэтому надо выбрать последовательность $\psi_n(x)$, сходящуюся к $\psi(x)$ в более слабом смысле, например,

$\int_{\alpha}^{\beta} |\psi_n(x) - \psi(x)| dx \to 0$ при $n \to \infty$ для любого отрезка $[\alpha, \beta]$.

Найдем классические решения $u_n(x, t)$ задач Коши с начальными данными φ, ψ_n и в качестве решения исходной задачи с начальными данными φ, ψ возьмем $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x,t)$. Для заданных φ и ψ это решение можно получить по формуле Даламбера (4.6). ■

Пример 4.5. Если в начальный момент времени струне был передан сосредоточенный в точке $x = 0$ импульс I, а $\varphi(x) \equiv 0$, то

в постановке задачи Коши содержится δ-функция: $u_t(x,0) = \frac{I}{\rho}\delta(x)$.

Поскольку в условиях задачи присутствует обобщенная функция, ее решение надо понимать в обобщенном смысле. Это решение можно построить по формуле Даламбера (4.6). ■

4.2. Начально-краевые задачи для уравнения колебаний на луче. Построение их решений методом продолжения. Распространение влияния краевого режима

4.2.1. Краевые условия

В задаче Коши для уравнения колебаний на прямой $-\infty < x < +\infty$ начальные данные φ, ψ определяют решение однозначно. Достаточно ли начальных данных для выделения единственного решения этого уравнения на луче $0 \le x < +\infty$? Рассмотрим для примера свободные поперечные колебания полуограниченной струны $0 \le x < +\infty$, которые вызваны возмущениями φ, ψ в момент времени $t = 0$, локализованными на интервале (x_1, x_2): $\varphi(x) = 0$ и $\psi(x) = 0$ при $x \notin (x_1, x_2)$, $x_1 > 0$. Начальные возмущения вызовут распространяющиеся по струне со скоростью a волны. Волна, бегущая влево, в момент времени $t = x_1/a$ достигнет конца струны и в течение времени $x_1/a \le t \le x_2/a$ будет от него отражаться. Отраженная волна побежит вправо и будет определяться не только падающей на конец струны волной, но и характером этого отражения, которое происходит по-разному при разных допустимых режимах движения конца струны. Поэтому для полного задания процесса распространения волн на луче

$0 \le x < +\infty$ кроме начальных данных нужно еще краевое условие. Рассмотрим несколько типов локальных (в точке $x = 0$) линейных краевых условий.

Краевое условие первого рода, или ***условие Дирихле*** $u(0, t) = \mu(t)$, $t \ge 0$, означает, что конец струны движется по заранее определенному закону. В частности, $u(0, t) = 0$ при $t \ge 0$ — условие неподвижности конца струны: он «*жестко закреплен*».

Краевое условие второго рода, или ***условие Неймана*** $u_x(0, t) = \nu(t)$, $t \ge 0$, выражает равенство величин приложенной со стороны внешнего мира к концу струны поперечной внешней силы $\mathbf{f}(t)$ и силы упругости струны, которая по закону Гука пропорциональна $u_x(0, t)$ (с положительным коэффициентом пропорциональности) и действует на внешний мир; их направления противоположны (следовательно, знаки $\nu(t)$ и $f(t)$ должны быть различными). В частности, $u_x(0, t) = 0$, $t \ge 0$, — условие *свободного конца струны*: на него не действует внешняя сила.

Пусть на конец струны $x = 0$ со стороны внешнего мира действует поперечная внешняя сила $\mathbf{f}(t)$. Если к тому же конец струны закреплен упруго, например, с помощью пружины, то величина поперечной силы закрепления, действующей на конец струны и препятствующей его смещению, пропорциональна (с положительным коэффициентом пропорциональности) величине смещения. Это означает, что пружину можно рассматривать как «часть струны», дающую дополнительную силу упругости на конце струны $x = 0$. Тогда $u_x(0, t) - hu(0, t) = \nu(t)$, $h = \text{const} > 0$, $t \ge 0$, — краевое *условие третьего рода*.

Замечание 4.3. Для конечной струны $0 \le x \le l$ на конце $x = l$ краевое условие третьего рода имеет вид $u_x(l, t) + hu(l, t) = \nu_l(t)$, $h = \text{const} > 0$, $t \ge 0$ (здесь знаки $\nu_l(t)$ и $f_l(t)$ одинаковы). Почему? Учтите, что действующая на внешний мир сила упругости струны на правом ее конце пропорциональна $-u_x(l, t)$. ■

Краевое условие на конце струны $x = 0$ может содержать скорость его поперечного движения $u_t(0, t)$, если, например, конец струны испытывает силу трения, пропорциональную $u_t(0, t)$. Краевое условие может содержать ускорение $u_{tt}(0, t)$, если, например, к концу струны прикреплен точечный груз некоторой массы, на который действует сила тяжести (аналогично для конца $x = l$ конечной струны $0 \le x \le l$).

4.2.2. Начально-краевые задачи на луче и их сведение к задаче Коши на прямой

Чтобы сформулировать начально-краевые задачи для уравнения колебаний на луче, напомним обозначения: $D = \{0 < x < +\infty\}$, $\overline{D} = \{0 \le x < +\infty\}$, $Q_T = D \times (0,\, T]$, $\overline{Q}_T = \overline{D} \times [0,T]$, $Q = Q_{T=+\infty} = D \times (0,\, +\infty)$, $\overline{Q} = \overline{D} \times [0,+\infty)$.

Начально-краевая задача состоит в нахождении решения уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ (x,t) \in Q, \tag{4.11}$$

которое удовлетворяет начальным условиям

$$u(x,\, 0) = \varphi(x),\ u_t(x,\, 0) = \psi(x),\ x \in \overline{D}, \tag{4.12}$$

и одному из краевых условий

$$u(0,\, t) = \mu(t), \tag{4.13}$$

или

$$u_x(0,\, t) = \nu(t), \tag{4.14}$$

или

$$u_x(0,\, t) - hu(0,\, t) = \nu(t) \tag{4.15}$$

при $t \ge 0$ (или какому-либо краевому условию другого типа).

Краевые условия (4.13) — (4.15) можно записать единообразно: $\alpha u_x(0,\, t) + \beta u(0,\, t) = \chi(t)$. Решение подразумевается классическим: $u \in C\left(\overline{Q}\right) \cap C^2(Q)$ в случае краевого условия (4.13), $u \in C^1\left(\overline{Q}\right) \cap C^2(Q)$ в случае краевых условий (4.14) *или* (4.15), причем $u(x,\, t)$ и $u_t(x,\, t)$ принимают заданные в (4.12) значения при $t = 0$, непрерывно примыкая к ним при $t \to 0+$. Классическое решение существует только, если функции f, φ, ψ, μ, ν удовлетворяют специальным требованиям, в частности, необходимо согласование начальных и краевого условий.

Замечание 4.4. Часто встречаются задачи, решения которых не могут удовлетворять требованиям, предъявляемым к *классическим* решениям. Если не выполняется согласование начальных и краевого условий или искомая функция $u(x,\, t)$ не может обладать требуемой гладкостью, то понятие решения задачи надо рассматривать в более широком, *обобщенном* смысле. ■

В силу линейности задачи ее решение можно представить в виде суммы решений двух задач:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \\ \alpha u_x(0,t) + \beta u(0,t) = 0, \end{cases} \tag{4.16}$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, \\ \alpha u_x(0,t) + \beta u(0,t) = \chi(t). \end{cases} \tag{4.17}$$

Задача (4.17) о распространении влияния краевого режима будет изучена отдельно. Решим сначала задачу (4.16) с *однородным* краевым условием. Для этого сведем ее к задаче Коши на всей прямой $-\infty < x < +\infty$.

Решение (классическое или в обобщенном смысле) задачи Коши

$$\begin{cases} U_{tt} = a^2 U_{xx} + F(x,t), \ -\infty < x < +\infty, \ 0 < t < +\infty; \\ U(x,0) = \Phi(x), \ U_t(x,0) = \Psi(x), \ -\infty < x < +\infty, \end{cases}$$

дается формулой Даламбера

$$U(x,t) = \frac{1}{2}\big(\Phi(x+at) + \Phi(x-at)\big) +$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{4.18}$$

Функции $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, $F(x,\ t)$ определены при $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$. Входящие в (4.18) выражения

$$\frac{1}{2}\big(\Phi(x+at) + \Phi(x-at)\big), \ \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)\,d\xi, \tag{4.19}$$

$$\frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,d\xi$$

имеют следующие простые свойства.

Свойство 4.1. Если $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ и $F(x,\ t)$ по переменной x являются ***нечетными*** функциями, то каждое из трех выражений (4.19) (а следовательно, и их сумма (4.18)) удовлетворяет условию $u(0,\ t) = 0$ при всех $t \geq 0$.

Доказательство:

$$\big(\Phi(x+at)+\Phi(x-at)\big)\Big|_{x=0} = \Phi(at)+\Phi(-at) = \Phi(at)-\Phi(at) = 0.$$

$$\int_{-at}^{at} \Psi(\xi)\,d\xi = 0. \qquad \int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,d\xi = 0. \ \blacksquare$$

Свойство 4.2. Пусть $\Phi(x)$ имеет непрерывную производную $\Phi_x(x)$. Если $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ и $F(x,\, t)$ по переменной x являются ***четными*** функциями, то каждое из трех выражений (4.19) (а следовательно, и их сумма (4.18)) удовлетворяет условию $u_x(0,\, t) = 0$ при всех $t \geq 0$.

Доказательство. Если $\Phi(x)$ четная, то $\Phi_x(x)$ нечетная, поэтому

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\big(\Phi(x+at)+\Phi(x-at)\big)\right)\Big|_{x=0} = 0.$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi)\,d\xi\right)\Big|_{x=0} = \big(\Psi(x+at)-\Psi(x-at)\big)\Big|_{x=0} = 0.$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,d\xi\right)\Big|_{x=0} =$$

$$= \big(F(x+a(t-\tau),\tau)-F(x-a(t-\tau),\tau)\big)\Big|_{x=0} = 0. \ \blacksquare$$

Свойство 4.3. Пусть $\Phi(x)$, $\Psi(x)$, $F(x,\, t)$ имеют непрерывные производные $\Phi_x(x)$, $\Psi_x(x)$, $F_x(x,\, t)$. Если $\Phi_x(x) - h\Phi(x)$, $\Psi_x(x) - h\Psi(x)$, $F_x(x,\, t) - hF(x,\, t)$ по переменной x являются ***нечетными*** функциями ($h = \text{const}$), то каждое из трех выражений (4.19) (а следовательно, и их сумма (4.18)) удовлетворяет условию $u_x(0,\, t) - hu(0,\, t) = 0$ при всех $t \geq 0$.

Доказательство.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\big(\Phi(x+at)+\Phi(x-at)\big)\right)\Big|_{x=0} - h\big(\Phi(at)+\Phi(-at)\big) =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x+at)\right)\Big|_{x=0} - h\Phi(at)\right] + \left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi(x-at)\right)\Big|_{x=0} - h\Phi(-at)\right] = 0.$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{x-at}^{x+at}\Psi(\xi)d\xi\right)\Bigg|_{x=0} - h\int\limits_{-at}^{at}\Psi(\xi)d\xi = \int\limits_{-at}^{at}\big(\Psi_\xi(\xi) - h\Psi(\xi)\big)d\xi = 0.$$

Совершенно аналогично для выражения в (4.19), содержащего F. ■

Чтобы из (4.18) получить формулу для решения $u(x,\ t)$ задачи (4.16), надо при $t \geq 0$ на плоскости Oxt рассмотреть две области: $x > at$ и $0 < x < at$. Очевидно, что при $x > at$ решение задачи (4.16) дается формулой

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} +$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi.$$

Здесь отраженная от конца струны $x = 0$ волна еще ***не оказывает влияния*** в этой области. Построим решение $u(x,\ t)$ при $0 < x < at$, где содержится отраженная волна. Для этого рассмотрим отдельно случаи краевых условий первого, второго и третьего рода.

В задаче (4.16) с краевым условием Дирихле $u(0,\ t) = 0$ ($\alpha = 0$, $\beta \neq 0$) продолжим функции φ, ψ, f на всю прямую ***нечетным*** образом:

$$\Phi(x) = \begin{cases}\varphi(x), x \geq 0,\\ -\varphi(-x), x \leq 0,\end{cases} \quad \Psi(x) = \begin{cases}\psi(x), x \geq 0,\\ -\psi(-x), x \leq 0,\end{cases}$$

$$F(x,t) = \begin{cases}f(x,t), x \geq 0,\\ -f(-x,t), x \leq 0.\end{cases}$$

В $\overline{Q}$ определенная формулой (4.18) функция $U(x,\ t)$ совпадет с решением $u(x,\ t)$ задачи (4.16), поскольку в Q уравнения для $U(x,\ t)$ и для $u(x,\ t)$ одинаковы, в $\overline{D}$ начальные данные совпадают, а краевое условие $U(0,\ t) = 0$ выполнено по свойству 4.1. Чтобы из (4.18) получить формулу для $u(x,\ t)$, надо теперь при $t \geq 0$ на плоскости Oxt рассмотреть две области: $x > at$ и $0 < x < at$. Пользуясь характеристическим треугольником, «расшифровываем» (4.18) в области $0 < x < at$ при нечетных Φ, Ψ, F:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at)-\varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi + \mathscr{F}_1(x,t),$$

где $\mathscr{F}_1(x,t)=\dfrac{1}{2a}\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}}d\tau\int\limits_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi+\dfrac{1}{2a}\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t}d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi,$

$0<x<at.$

В задаче (4.16) с краевым условием Неймана $u_x(0,\,t)=0$ ($\alpha\neq 0,\,\beta=0$) продолжим функции φ, ψ, f на всю прямую ***четным*** образом:

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x),x\geq 0,\\ \varphi(-x),x\leq 0,\end{cases}\quad \Psi(x)=\begin{cases}\psi(x),x\geq 0,\\ \psi(-x),x\leq 0,\end{cases}$$

$$F(x,t)=\begin{cases}f(x,t),x\geq 0,\\ f(-x,t),x\leq 0.\end{cases}$$

В $\bar{Q}$ определенная формулой (4.18) функция $U(x,\,t)$ совпадет с решением задачи (4.16). Чтобы из (4.18) получить формулу для $u(x,\,t)$ в области $0<x<at$ при четных Φ, Ψ, F, снова воспользуемся характеристическим треугольником:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{at-x}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\mathscr{F}_2(x,t),$$

где

$$\mathscr{F}_2(x,t)=\frac{1}{a}\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}}d\tau\int\limits_0^{a(t-\tau)-x}f(\xi,\tau)d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}}d\tau\int\limits_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t}d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi.$$

В задаче (4.16) с краевым условием третьего рода $u_x(0,\,t)-$ $-hu(0,\,t)=0$ ($\alpha=1,\beta=-h$) также продолжим функции φ, ψ, f на всю прямую. Функцию $\Phi(x)$ при $x\leq 0$ найдем из ***задачи Коши*** для дифференциального уравнения первого порядка:

$$\begin{cases}\Phi'(x)-h\Phi(x)=-\varphi'(-x)+h\varphi(-x),x\leq 0,\\ \Phi(0)=\varphi(0).\end{cases}$$

Ее решение: $\Phi(x)=\varphi(-x)+2h\int\limits_0^x \mathrm{e}^{h(x-\xi)}\varphi(-\xi)d\xi, x\le 0.$

Аналогично строим $\Psi(x)$ и $F(x,\,t)$ при $x<0$, а затем «расшифровываем» (4.18) в области $0<x<at$, пользуясь характеристическим треугольником:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}-h\mathrm{e}^{h(x-at)}\int\limits_0^{at-x}\mathrm{e}^{h\xi}\varphi(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_{at-x}^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{\mathrm{e}^{h(x-at)}}{a}\int\limits_0^{at-x}\mathrm{e}^{h\xi}\psi(\xi)d\xi+\mathscr{F}_3(x,t),$$

где

$$\mathscr{F}_3(x,t)=\frac{\mathrm{e}^{h(x-at)}}{a}\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}}\mathrm{e}^{ha\tau}d\tau\int\limits_0^{a(t-\tau)-x}\mathrm{e}^{h\xi}f(\xi,\tau)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2a}\int\limits_0^{t-\frac{x}{a}}d\tau\int\limits_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_{t-\frac{x}{a}}^{t}d\tau\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)d\xi$$

(сравните со случаем краевого условия Неймана, положив $h=0$).

4.2.3. Распространение волны, вызванной краевым режимом

В задаче (4.17) причиной возникновения возмущений может быть только краевой режим. Он вызывает бегущую вправо волну: $u(x,\,t)=g(x-at)$, где $g(p)$ — подлежащая определению функция одной переменной p. В области $x>at$, очевидно, $u(x,\,t)=0$: вызванная краевым режимом волна в момент времени $t>0$ еще не достигла точек с такими координатами x. Найдем $u(x,\,t)$ в области $0<x<at$.

В задаче (4.17) с краевым условием Дирихле $u(0,\,t)=\mu(t)$ функцию $g(p)$ найдем из краевого условия: $u(0,\,t)=g(-at)=\mu(t)$, откуда $g(p)=\mu\left(-\dfrac{p}{a}\right)$ (проведена замена $p=-at$). Поэтому

$$u(x,t)=\begin{cases}0, x\ge at,\\ \mu\left(t-\dfrac{x}{a}\right), 0\le x\le at.\end{cases}$$

В задаче (4.17) с краевым условием Неймана $u_x(0,\, t) = \nu(t)$ функцию $g(p)$ также найдем из краевого условия: $u_x(0,\, t) = g'(-at) = \nu(t)$,

откуда $g'(p) = \nu\left(-\dfrac{p}{a}\right)$, $g(p) = \displaystyle\int_0^p \nu\left(-\frac{\xi}{a}\right) d\xi = -a\int_0^{-\frac{p}{a}} \nu(\tau) d\tau$. Поэтому

получаем решение $u(x,t) = \begin{cases} 0, x \geq at, \\ -a\displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}} \nu(\tau) d\tau, 0 \leq x \leq at. \end{cases}$

В задаче (4.17) с краевым условием третьего рода $u_x(0,\, t) - hu(0,\, t) = \nu(t)$ для нахождения $g(p)$ из краевого условия имеем $g'(-at) - hg(-at) = \nu(t)$. Снова полагая $p = -at$, получаем задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} g'(p) - hg(p) = \nu\left(-\dfrac{p}{a}\right), p < 0, \\ g(0) = 0. \end{cases}$$

Ее решение: $g(p) = \displaystyle\int_0^p \mathrm{e}^{h(p-\xi)} \nu\left(-\frac{\xi}{a}\right) d\xi = -a\mathrm{e}^{hp} \int_0^{-\frac{p}{a}} \mathrm{e}^{ha\tau} \nu(\tau) d\tau$. Тогда решение (4.17) с краевым условием третьего рода имеет вид

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, x \geq at, \\ -a\mathrm{e}^{h(x-at)} \displaystyle\int_0^{t-\frac{x}{a}} \mathrm{e}^{ha\tau} \nu(\tau) d\tau, 0 \leq x \leq at. \end{cases}$$

4.3. Задачи Коши для волнового уравнения в пространстве и на плоскости. Формулы Кирхгофа и Пуассона. Метод спуска

4.3.1. Классическое решение задачи Коши в пространстве

Задача Коши для волнового уравнения в пространстве состоит в нахождении функции $u(M,\, t)$, $M = M(x,\, y,\, z)$, удовлетворяющей уравнению

$$u_{tt}(M,t) = a^2 \Delta_M u(M,t) + f(M,t), \quad M \in \mathbb{R}^3,\ t > 0 \qquad (4.20)$$

и начальным условиям

$$u(M,\,0)=\varphi(M),\ u_t(M,\,0)=\psi(M),\ M\in\mathbb{R}^3. \qquad (4.21)$$

Таким образом, область $D=\mathbb{R}^3$, ее граница $S=\varnothing$, задача поставлена в $\overline{Q}=\overline{Q}_\infty=\left\{(M,t)\middle|\, M\in\mathbb{R}^3, 0\le t<+\infty\right\}$.

Замечание 4.5. В пространстве независимых переменных x, y, z, t гиперповерхность $t=0$, на которой заданы данные Коши, не является характеристической.■

Классическим решением задачи (4.20), (4.21) называют функцию $u\in C^2(Q)\cap C^1\left(\overline{Q}\right)$, которая вместе с производной u_t непрерывно примыкает к начальным данным при $t\to 0+$. При этом необходимо, чтобы $f\in C(Q)$, $\varphi\in C^1(D)$, $\psi\in C(D)$.

Как и в задаче Коши с одной пространственной переменной, постоянная $a>0$ является величиной скорости распространения волн в пространстве. Покажем это на примере задачи (4.20), (4.21) в случае ее сферической симметрии: $\varphi=\varphi(r)$, $\psi=\psi(r)$, $f=f(r,\,t)$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Решение такой задачи в каждый момент времени также должно быть сферически симметричным: $u=u(r,\,t)$. В сферической системе координат в случае сферической симметрии оператор Лапласа имеет вид $\Delta u=\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)\equiv\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}$, поэтому

$$\begin{cases} u_{tt}(r,t)=a^2\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2\left(ru(r,t)\right)}{\partial r^2}+f(r,t), r>0, t>0;\\ u(r,0)=\varphi(r), u_t(r,0)=\psi(r), r\ge 0;\\ \left|u(r,t)\right|<\text{const}, 0\le r\le r_0, t\ge 0. \end{cases}$$

Положим $v(r,\,t)=ru(r,\,t)$, тогда для функции $v(r,\,t)$ получим задачу на луче $r\ge 0$:

$$\begin{cases} v_{tt}=a^2v_{rr}+rf(r,t), r>0, t>0;\\ v(r,0)=r\varphi(r), v_t(r,0)=r\psi(r), r\ge 0;\\ v(0,t)=0, t\ge 0. \end{cases}$$

При этом учтено, что $\lim\limits_{r\to 0+}\left(ru(r,t)\right)=0$ в силу ограниченности u.

Решение $v(r,\,t)$ строится методом продолжения на всю прямую $-\infty<r<+\infty$ (по формуле Даламбера) и представляет собой

волны, распространяющиеся вдоль луча $0 \le r < +\infty$ вправо и влево со скоростью a. Им соответствуют сферические волны в пространстве: расходящаяся из точки $r = 0$ в бесконечность и сходящаяся в эту точку из бесконечности. Отметим, что $u(r,t) = \dfrac{v(r,t)}{r}$, поэтому распространяющиеся в пространстве сферические волны убывают на бесконечности как $\dfrac{1}{r}$.

Сформулируем без подробного доказательства теорему, дающую решение задачи (4.20), (4.21).

Теорема 4.5. Пусть $f \in C^2\left(\overline{Q}\right)$, $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Тогда классическое решение задачи (4.20), (4.21) существует, оно единственно и выражается ***формулой Кирхгофа***:

$$u(M,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_M^{at}} \varphi(P)\,dS_P\right] +$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_M^{at}} \psi(P)\,dS_P + \frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{K_M^{at}} \frac{f\left(P, t - \dfrac{R_{MP}}{a}\right)}{R_{MP}}\,dD_P. \quad (4.22)$$

Здесь K_M^{at} — замкнутый шар с центром в точке M радиуса at; S_M^{at} — его поверхность; dS_P — элемент площади поверхности сферы; dD_P — элемент объема; $R_{MP} = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 + (z_P - z_M)^2}$.

Из формулы Кирхгофа вытекает при $0 \le t \le T$ устойчивость решения задачи (4.20), (4.21) по отношению к возмущениям φ, ψ, f. Тем самым задача (4.20), (4.21) корректна.

Замечание 4.6. Напомним (см. п. 1.3.1), что в пространстве переменных x_P, y_P, z_P, t поверхность $R_{MP}^2 = a^2(t - t_0)^2$ является характеристикой волнового уравнения. Это конус в четырехмерном пространстве с вершиной (M, t_0). Если в этом четырехмерном пространстве точка (M, t_0) фиксирована, то условие

$$R_{MP} = a(t_0 - t),\ t < t_0 \quad (4.23)$$

определяет те точки $P \in \mathbb{R}^3$, из которых возмущение, выпедшее в момент времени t, достигнет точки M в момент времени t_0. Условие

$$R_{MP} = a(t - t_0),\ t > t_0 \quad (4.24)$$

определяет те точки $P \in \mathbb{R}^3$, для которых возмущение, выпедшее в момент времени t_0 из точки M, достигнет P в момент t. Если t и t_0 фиксировать, то (4.23) и (4.24) определяют сферы в $\mathbb{R}^3$. ■

Замечание 4.7. Если положить $U = \begin{cases} u, t \geq 0, \\ 0, t < 0, \end{cases}$ $F = \begin{cases} f, t \geq 0, \\ 0, t < 0, \end{cases}$ то в пространстве четырех независимых переменных $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $-\infty < z < +\infty$, $-\infty < t < +\infty$ функция $U(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению $U_{tt} = a^2 \Delta U + F(x,y,z,t) + \varphi(x,y,z)\delta'(t) + +\psi(x,y,z)\delta(t)$ в смысле обобщенных функций. Начальные возмущения φ и ψ для функции U играют роль мгновенного источника $\varphi(x,y,z)\delta'(t) + \psi(x,y,z)\delta(t)$, «срабатывающего» в момент времени $t = 0$. При этом начальное возмущение φ определяет ***двойной слой*** $\varphi(x, y, z)\delta'(t)$, а начальное возмущение ψ определяет ***простой слой*** $\psi(x, y, z)\delta(t)$ на гиперплоскости $t = 0$ в четырехмерном пространстве. Формула (4.22) представляет решение $u(M, t)$ в виде суммы ***запаздывающих*** потенциалов двойного слоя, простого слоя и объемного потенциала. ■

Идея доказательства формулы (4.22). Рассмотрим сначала случай $f \equiv 0$. Введем оператор $\mathcal{M}: C^2(\mathbb{R}^3) \to C^2(\mathbb{R}^3)$ по следующему правилу: для произвольной функции $\gamma(M) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ при $t > 0$ положим

$$\mathcal{M}[\gamma](M,t) = \frac{1}{4\pi a^2 t} \iint\limits_{S_M^{at}} \gamma(P)\, dS_P = \frac{t}{4\pi} \iint\limits_{S_O^1} \gamma(P')\, dS_{P'}, \quad (4.25)$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + at\overrightarrow{OP'}, \;\; dS_P = (at)^2\, dS_{P'}.$$

Величина $\frac{1}{t}\mathcal{M}[\gamma](M,t)$ является средним значением функции γ на сфере S_M^{at}. Основное свойство оператора $\mathcal{M}$ состоит в том, что для любой функции $\gamma(M) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ функция $\mathcal{M}[\gamma](M, t)$ удовлетворяет задаче

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{M}[\gamma](M,t) = a^2 \Delta_M \mathcal{M}[\gamma](M,t), \quad M \in \mathbb{R}^3, \, t > 0, \quad (4.26)$$

$$\mathcal{M}[\gamma](M, 0) = 0, \; \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{M}[\gamma](M,0) = \gamma(M), \quad M \in \mathbb{R}^3.$$

Поэтому, если $\psi(M) \in C^2(\mathbb{R}^3)$, то при $f \equiv 0$ и $\varphi \equiv 0$ решение задачи (4.20), (4.21) дается в виде $\mathcal{M}[\psi](M,t)$. Функция $\dfrac{\partial}{\partial t}\mathcal{M}[\varphi](M,t)$ является решением задачи (4.20), (4.21) при $f \equiv 0$ и $\psi \equiv 0$, если $\varphi(M) \in C^3(\mathbb{R}^3)$.

Действительно, поскольку функция $\mathcal{M}[\varphi](M,t)$ удовлетворяет однородному волновому уравнению, то и $\dfrac{\partial}{\partial t}\mathcal{M}[\varphi](M,t)$ удовлетворяет этому уравнению. Тогда из второго начального условия задачи (4.26) получаем первое начальное условие в (4.21), а второе условие в (4.21) ($\psi \equiv 0$) выполнено в силу равенства (см. (4.25))

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{M}[\varphi](M,t)\right)\Big|_{t=0} = a^2\Delta_M\,\mathcal{M}[\varphi](M,t)\big|_{t=0} = 0.$$

Решение задачи (4.20), (4.21) с f, не равной тождественно нулю, $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$ можно построить, пользуясь ***принципом Дюамеля***: если функция $w(M,\,t,\,\tau)$ удовлетворяет задаче

$$w_{tt} = a^2\Delta_M w(M,t,\tau),\ \ M \in \mathbb{R}^3,\ t > \tau;$$

$$w(M,\,\tau,\,\tau) = 0,\ w_t(M,\,\tau,\,\tau) = f(M,\,\tau),\ M \in \mathbb{R}^3,$$

то функция $u(M,t) = \int\limits_0^t w(M,t,\tau)\,d\tau$ является решением задачи (4.20), (4.21) при $\varphi \equiv 0$, $\psi \equiv 0$. Тем самым третье слагаемое в (4.22) получаем из $\displaystyle\int\limits_0^t \left(\frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)}\iint\limits_{S_M^{a(t-\tau)}} f(P,\tau)\,dS_P\right)d\tau$. ■

Замечание 4.8. Если $f \equiv 0$, то формула (4.22) имеет вид

$$u(M,t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{M}[\varphi](M,t) + \mathcal{M}[\psi](M,t).\ \blacksquare$$

Замечание 4.9. Пусть $u(M,\,t)$ удовлетворяет волновому уравнению $u_{tt} = a^2\Delta_M u + f(M,t)$ в ***ограниченной*** области $D \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой (или кусочно-гладкой) границей S, $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к S. Тогда $u(M,\,t)$ удовлетворяет интегральной формуле Кирхгофа:

$$u(M,t)=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left[\frac{1}{R_{MP}}\widetilde{\left(\frac{\partial u}{\partial n_P}\right)}-\widetilde{(u)}\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)+\frac{1}{aR_{MP}}\widetilde{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}\frac{\partial R_{MP}}{\partial n_P}\right]dS_P+$$

$$+\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_D\frac{\widetilde{(f)}}{R_{MP}}dD_P,\ M\in D, \tag{4.27}$$

где

$$\widetilde{\left(\frac{\partial u}{\partial n_P}\right)}=\frac{\partial u\left(P,t-\dfrac{R_{MP}}{a}\right)}{\partial n_P};$$

$$\widetilde{(u)}=u\left(P,t-\frac{R_{MP}}{a}\right);$$

$$\widetilde{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}=\frac{\partial u\left(P,t-\dfrac{R_{MP}}{a}\right)}{\partial t};$$

$$\widetilde{(f)}=f\left(P,t-\frac{R_{MP}}{a}\right).$$

В стационарном случае $u(M,\,t)=u(M)$, $f(M,\,t)=f(M)$ формула (4.27) принимает вид

$$u(M)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S\left[\frac{1}{R_{MP}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\right]dS_P+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_D\frac{f(P)/a^2}{R_{MP}}dD_P$$

и дает интегральное представление решения уравнения Пуассона $\Delta_M u(M)=-f(M)/a^2$ (см. п. 3.2.3).

Если $D=K_M^{at}$, то формула (4.27) преобразуется в (4.22), откуда видно, что для нахождения решения задачи Коши $u(M,\,t)$ по (4.22) нужно знать значения начального смещения φ ***и его нормальной производной*** $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}$ на S_M^{at}, а также значения начальной скорости ψ на S_M^{at}. В случае неоднородного волнового уравнения надо еще учесть возмущения от всех распределенных в пространстве $\mathbb{R}^3$ источников, которые достигают M в данный момент времени t. ■

4.3.2. Классическое решение задачи Коши на плоскости. Метод спуска

Частным случаем задачи (4.20), (4.21) является задача о ***цилиндрических волнах***. Пусть данные в (4.20), (4.21) не зависят от z: $f = f(x, y, t)$, $\varphi = \varphi(x, y)$, $\psi = \psi(x, y)$, тогда и решение не зависит от z: $u = u(x, y, t)$. Такую задачу можно рассматривать как задачу Коши на плоскости Oxy, однако будем одновременно считать, что она поставлена в пространственных переменных x, y, z с независящими от z данными. Тогда задача (4.20), (4.21) описывает распространение цилиндрических волн в $Oxyz$, форма которых не зависит от координаты z:

$$u_{tt} = a^2 \Delta_M u + f(M,t),\ M \in Oxy,\ t > 0; \tag{4.28}$$

$$u(M,\ 0) = \varphi(M),\ u_t(M,\ 0) = \psi(M),\ M \in Oxy; \tag{4.29}$$

$$D \in \mathbb{R}^2;\ \overline{Q} = \overline{Q}_\infty = \left\{(M,t) \middle| M \in \mathbb{R}^2, 0 \le t < +\infty\right\},$$

причем каждая точка $M = M(x_M,\ y_M) \in Oxy$ может рассматриваться еще и как прямая линия в $Oxyz$, параллельная Oz и проходящая через эту точку.

Теорема 4.6. Пусть $f \in C^2\left(\overline{Q}\right)$, $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^2)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Тогда классическое решение задачи (4.28), (4.29) существует, оно единственно и выражается ***формулой Пуассона***:

$$u(M,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{N_M^{at}} \frac{\varphi(p)d\nu_p}{\sqrt{a^2t^2 - R_{MP}^2}}\right] + \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{N_M^{at}} \frac{\psi(P)d\nu_P}{\sqrt{a^2t^2 - R_{MP}^2}} + \\ + \int\limits_0^t \left(\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{N_M^{a(t-\tau)}} \frac{f(P,\tau)d\nu_P}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - R_{MP}^2}}\right) d\tau. \tag{4.30}$$

Здесь N_M^{at}, $N_M^{a(t-\tau)}$ — замкнутые круги на плоскости Oxy с центрами в точке M радиусов at и $a(t-\tau)$ соответственно; $d\nu_P$ — элемент площади круга; $R_{MP} = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2}$.

Из формулы Пуассона вытекает при $0 \le t \le T$ устойчивость решения задачи (4.28), (4.29) по отношению к возмущениям φ, ψ, f.

Обоснование формулы Пуассона методом спуска.

Если в формуле (4.22) функции φ, ψ, f, u не зависят от переменной z, то в (4.22) от интегрирования по поверхности сферы S_M^{at} $(M \in Oxy)$ можно перейти к интегрированию по проекции этой сферы на плоскость Oxy, т.е. по кругу N_M^{at}. При этом на N_M^{at} будут проектироваться верхняя и нижняя полусферы, поэтому надо учесть множитель 2 при переходе от интеграла по S_M^{at} к интегралу по N_M^{at}. Элемент dS_P поверхности сферы выражают через его проекцию $d\nu_P$ на Oxy и через косинус угла между внешней нормалью $\mathbf{n}_P$ к S_M^{at} в точке P и положительным направлением оси Oz:

$$dS_P = \frac{d\nu_P}{\cos\left(\widehat{\mathbf{n}_p, Oz}\right)} = \frac{(at)\,d\nu_P}{\sqrt{a^2t^2 - (x_P - x_M)^2 - (y_P - y_M)^2}}.$$

Отсюда из первых двух слагаемых в (4.22) получаем соответствующие слагаемые в (4.30). Аналогично из третьего слагаемого в (4.22) получим третье слагаемое в (4.30), если вспомним, что

$$\frac{1}{4\pi a^2}\iiint\limits_{K_M^{at}} \frac{f\left(P, t - \dfrac{R_{MP}}{a}\right)}{R_{MP}}\,dD_P = \int\limits_0^t \left(\frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)} \iint\limits_{S_M^{a(t-\tau)}} f(P,\tau)\,dS_P\right) d\tau.$$

Такой метод вывода формулы (4.30) называется ***методом спуска*** (от пространственных переменных x, y, z к пространственным переменным x, y при независимости задачи от z).

Замечание 4.10. Если в случае двух пространственных переменных ввести оператор $\mathcal{M}[\gamma](M,t) = \dfrac{1}{2\pi a}\iint\limits_{N_M^{at}} \dfrac{\gamma(P)\,d\nu_P}{\sqrt{a^2t^2 - R_{MP}^2}}$, то при $f \equiv 0$ формула (4.30) примет вид

$$u(M,t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{M}[\varphi](M,t) + \mathcal{M}[\psi](M,t). \quad \blacksquare$$

4.3.3. Плоские волны

Частным случаем задачи (4.20), (4.21) является задача о ***плоских волнах***.

Пусть данные в (4.20), (4.21) не зависят от y и z: $f = f(x,\ t)$, $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$. Тогда и решение $u = u(x,\ t)$ не будет зависеть от y и z. Такую задачу можно рассматривать как задачу Коши на прямой Ox, однако будем одновременно считать, что она поставлена в пространственных переменных x, y, z с независящими от y и z данными. Тогда задача (4.20), (4.21) описывает распространение плоских волн в $Oxyz$, форма которых не зависит от координат y и z:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t),\ M = M(x) \in Ox,\ t > 0, \tag{4.31}$$

$$u(x,\ 0) = \varphi(x),\ u_t(x,\ 0) = \psi(x),\ -\infty < x < +\infty, \tag{4.32}$$

$$D = \mathbb{R}^1,\ \overline{Q} = \overline{Q}_\infty = \left\{(M,t) \middle| M \in \mathbb{R}^1, 0 \le t < +\infty\right\},$$

причем каждая точка $M \in Ox$ может рассматриваться еще и как плоскость в $Oxyz$, параллельная Oyz и проходящая через эту точку.

Если функция f непрерывна и имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ в $\overline{Q}$, $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^1)$, $\psi \in C^1(\mathbb{R}^1)$, то классическое решение задачи (4.31), (4.32) существует, оно единственно и выражается формулой Даламбера:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \left(\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi \right) d\tau. \tag{4.33}$$

Если $f \in C^2\left(\overline{Q}\right)$, $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^1)$, $\psi \in C^2(\mathbb{R}^1)$, то формулу (4.33) можно получить методом спуска из формулы (4.30). Пусть в (4.30) $M = M(x,\ 0) \in Oxy$, $P = P(\xi,\ y) \in Oxy$, $R_{MP}^2 = (\xi - x)^2 + y^2$. Тогда для произвольной функции $\gamma(P)$ имеем

$$\frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{N_M^{at}} \frac{\gamma(P)\,d\nu_P}{\sqrt{a^2t^2 - R_{MP}^2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \gamma(\xi) \int\limits_{-\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2}}^{\sqrt{a^2t^2-(\xi-x)^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2t^2 - (\xi-x)^2 - y^2}}\,d\xi = \frac{1}{2\pi a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \gamma(\xi)\,\pi\,d\xi.$$

Остается учесть, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\varphi(\xi)d\xi\right]=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}.$$

Замечание 4.11. Если в случае одной пространственной переменной ввести оператор $\mathcal{M}[\gamma](x,t)=\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\gamma(\xi)d\xi$, то при $f\equiv 0$ формула (4.33) примет вид

$$u(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{M}[\varphi](x,t)+\mathcal{M}[\psi](x,t). \blacksquare$$

Задача 4.1. Выведите формулу (4.33) непосредственно из формулы (4.22), без промежуточного вывода (4.30). ■

4.3.4. Качественные различия формул Кирхгофа, Пуассона и Даламбера

В п. 4.1 с помощью характеристического треугольника описана зависимость решения задачи Коши в $\mathbb{R}^1$ от ее данных f, φ, ψ: чтобы построить $u(x_0,\ t_0)$ по формуле Даламбера, надо знать функцию f во всем характеристическом треугольнике, значения функции ψ на основании характеристического треугольника и значения функции φ лишь в двух граничных точках этого основания.

Чтобы описать характер зависимости решения от данных f, φ, ψ задачи Коши в $\mathbb{R}^n$, $n=2,3$, фиксируем точку $M\in\mathbb{R}^n$ и момент времени t_0.

Множество $\mathrm{Con}(M,t_0)=\left\{(P,t)\in\mathbb{R}^{n+1}\middle|\,R_{MP}<a(t_0-t),0<t<t_0\right\}$ является конусом в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ с вершиной в точке $(M,\ t_0)$, имеющим «высоту» t_0. Его боковая поверхность $\Gamma(M,t_0)=\left\{(P,t)\in\mathbb{R}^{n+1}\middle|\,R_{MP}=a(t_0-t),0\le t\le t_0\right\}$ принадлежит характеристике волнового уравнения $u_{tt}=a^2\Delta u+f$.

Лежащее в гиперплоскости $t=0$ основание конуса $\left\{(P,t)\in\right.$ $\left.\in\mathbb{R}^{n+1}\middle|\,R_{MP}\le at_0,t=0\right\}$ — это замкнутый шар $K_M^{at_0}\subset\mathbb{R}^3$ или замкнутый круг $N_M^{at_0}\subset\mathbb{R}^2$.

Граница основания конуса $\left\{(P,t)\in\mathbb{R}^{n+1}\middle|R_{MP}=at_0, t=0\right\}$ — это сфера $S_M^{at_0}\subset\mathbb{R}^3$ или окружность в $\mathbb{R}^2$.

Согласно формуле Кирхгофа (4.22), значение решения $u(M,\,t_0)$ зависит от значений функции f только на боковой поверхности $\Gamma(M,\,t_0)$ конуса $\mathrm{Con}(M,\,t_0)$ и от значений функций φ, ψ (и производных φ) только на границе основания конуса — на сфере $S_M^{at_0}$.

Согласно формуле Пуассона (4.30), значение решения $u(M,\,t_0)$ зависит от значений функции f во всем конусе $\overline{\mathrm{Con}(M,t_0)}$ и от значений функций φ, ψ (и производных φ) на всем основании $N_M^{at_0}$ этого конуса.

Рассмотрим качественно, на интуитивном уровне строгости, различия физических интерпретаций формул (4.22) и (4.30). Для понимания этого различия достаточно исследовать случай $f\equiv 0$ и $\varphi\equiv 0$ в (4.22) и (4.30). Будем пользоваться интуитивно ясным понятием мгновенного точечного источника возмущения $\psi=$ $=\delta(x,y,\,z,\,t)$.

Если мгновенный точечный источник возмущения импульса «сработал» в начале координат O в системе $Oxyz$ в момент времени $t=0$, то в момент времени $t>0$ обусловленное им возмущение будет сосредоточено на сфере S_O^{at}. В момент времени $t=\dfrac{R_{OM}}{a}$ возмущение пройдет через точку M, после чего в M снова наступит покой. Если причиной возмущения $u(M,\,t)$ является не один точечный источник, «сработавший» в O в момент времени $t=0$, а множество источников, распределение которых в пространстве в момент $t=0$ характеризуется функцией $\psi(P)$, то для нахождения $u(M,\,t)$ надо просуммировать вклады от тех источников, возмущения от которых за время t достигли точки M. Формула Кирхгофа выражает принцип Гюйгенса для однородного волнового уравнения $u_{tt}=a^2\Delta u$ в пространстве: каждый элемент поверхности, которой достигла в данный момент времени волна в пространстве, является центром элементарных волн, огибающая которых будет волновой поверхностью в «следующий» момент времени (при этом обратные волны не принимаются во внимание). Наиболее наглядно принцип Гюйгенса проявляется, если начальные данные сосредоточены в ***ограниченной*** области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$: $\psi(P)=0$ при $P\notin\Omega$. Пусть точка наблюдения $M\notin\bar{\Omega}$ и $R_{\min}$, $R_{\max}$ — наименьшее и наибольшее расстояния от M

до точек из $\bar{\Omega}$. Тогда в точку M возмущение придет в момент времени $t_{\min} = \dfrac{R_{\min}}{a}$ и будет действовать в M вплоть до момента времени $t_{\max} = \dfrac{R_{\max}}{a}$. При $t > t_{\max}$ в точке M снова наступит покой. Это значит, что через точку M в момент времени $t_{\min}$ проходит ***передний фронт волны***, а в момент времени $t_{\max}$ — ***задний фронт волны***. Множество зависимости решения от значений ψ в Ω есть множество точек в $\mathbb{R}^3$ между передним и задним фронтами. В момент времени t передний фронт является ***внешней огибающей*** сфер S_P^{at}, где точка P пробегает все множество $\bar{\Omega}$. Задний фронт является ***внутренней огибающей*** этих сфер. Итак, если начальные возмущения локализованы в пространстве ($\psi(P) = 0$ при $P \notin \Omega$), то в каждой точке пространства они вызывают возмущения, локализованные во времени. При этом нет последействия: после прохождения волной точки M эта точка «забывает» про волну.

Отличие формулы (4.30) от формулы (4.22) (мы снова считаем $f \equiv 0, \varphi \equiv 0$) состоит в том, что интеграл, содержащий ψ, вычисляется по кругу N_M^{at}, а не по его границе. Пусть снова мгновенный ***точечный*** источник возмущения импульса $\psi = \delta(x,\ y,\ t)$ ***на плоскости*** Oxy «сработал» в момент времени $t = 0$ в начале координат O. Этот источник теперь следует рассматривать как совокупность таких же источников, равномерно распределенных вдоль оси Oz в пространстве $Oxyz$. Возмущение от такого источника в момент времени $t > 0$ будет сосредоточено в замкнутом круге N_O^{at} на плоскости Oxy (или, что то же самое, в прямом цилиндре с основанием N_O^{at} и параллельной оси Oz образующей — в пространстве). Имеется передний фронт волны, движущийся на плоскости Oxy со скоростью a, заднего фронта волны нет — на плоскости имеет место ***диффузия волн***, принцип Гюйгенса на плоскости нарушается. Это легко понять, если рассмотреть распространение в пространстве $Oxyz$ цилиндрической волны, форма которой не зависит от z. Ее передний фронт движется перпендикулярно Oz со скоростью a. В пространстве $Oxyz$ действует принцип Гюйгенса, поэтому возмущение от равномерно распределенных вдоль Oz источников, «сработавших» в момент $t = 0$, в момент времени $t > 0$ достигнет точки $M \in Oxy$ лишь из тех точек сферы $S_M^{at} \subset Oxyz$, которые лежат на Oz, т.е. из двух точек

в пространстве с координатами $\left(0,0,\pm\sqrt{a^2t^2-R_{OM}^2}\right)$. При $0\le t<\dfrac{R_{OM}}{a}$ возмущение от источников, распределенных вдоль оси Oz, еще не достигнет точки $M\in Oxy$. В момент времени $t_{\min}=\dfrac{R_{OM}}{a}$ в точку M придет возмущение из точки O, а в каждый момент $t>t_{\min}$ в M будут приходить возмущения из указанных двух точек на оси Oz. Поэтому в точке M возмущение будет наблюдаться при ***всех*** $t>t_{\min}$ — задний фронт волны отсутствует. Если причиной возмущения $u(M,\,t)$ является не точечный источник ***на плоскости***, «сработавший» в O в момент $t=0$, а множество источников, распределение которых на Oxy в момент $t=0$ характеризуется функцией $\psi(P)$, то каждый из этих источников следует рассматривать как совокупность таких же источников, равномерно распределенных вдоль параллельной оси Oz прямой. Пусть ψ сосредоточена в ***ограниченной области*** $\Omega\subset\subset\mathbb{R}^2$: $\psi(P)=0$ при $P\notin\Omega$. В момент времени $t>0$ возмущение распространится на множество плоскости Oxy, являющееся объединением кругов N_P^{at}, где центры P пробегают всю область $\overline{\Omega}$. Граница объединения всех этих кругов является передним фронтом волны на плоскости. Пусть передний фронт волны достиг в какой-то момент времени точки $M\in Oxy$. Далее с течением времени колебания в M, обусловленные начальными данными в ограниченной области Ω, будут ощущаться постоянно, но при больших t затухая со временем: это затухание обеспечивают $\sqrt{a^2t^2-R_{MP}^2}$ в знаменателях подынтегральных выражений в (4.30). Возмущения, в момент $t=0$ локализованные на плоскости ($\psi(P)=0$ при $P\notin\Omega$), в каждой точке плоскости вызывают возмущения, не локализованные во времени.

Дадим качественное сравнение физических интерпретаций формулы (4.33) и формул (4.22), (4.30). Достаточно рассмотреть случай $f\equiv 0$. Формула (4.33) описывает распространение волн вдоль прямой Ox, вызванное начальными возмущениями φ и ψ. Ее отличие от формулы (4.30) состоит в том, что значение решения $u(x,\,t)$ определяется начальной скоростью ψ на отрезке $[x-at,\,x+at]$ и начальным смещением φ лишь на концах этого отрезка. В формуле (4.33) отрезок $[x-at,\,x+at]$ играет роль одномерного шара, а точки $x-at$, $x+at$ — его граница (сфера в одномерном пространстве). Поэтому зависимость решения от φ аналогична

случаю, характеризуемому формулой (4.22) в $\mathbb{R}^3$, а зависимость решения от ψ — случаю, характеризуемому формулой (4.30) в $\mathbb{R}^2$. Пусть мгновенный ***точечный источник на прямой*** Ox создал ***начальное отклонение*** в момент времени $t = 0$ в начале координат O. Этот источник теперь следует рассматривать как совокупность таких же источников, равномерно распределенных по плоскости Oyz в пространстве $Oxyz$. Согласно принципу Гюйгенса в трехмерном пространстве в момент времени $t > 0$ возмущение от этих распределенных по Oyz источников будет сосредоточено на плоскостях, параллельных Oyz и пересекающих Ox в точках $\pm at$. Эти две плоскости и являются фронтом волны; после прохождения точки в $Oxyz$ фронтом в ней снова наступает покой. Если мгновенный ***точечный источник на прямой*** Ox создал в точке O в момент $t = 0$ ***начальный импульс***, то и его следует рассматривать как совокупность таких же источников, равномерно распределенных по Oyz. В момент времени $t > 0$ возмущение от этих источников будет сосредоточено в плоском слое между плоскостями, параллельными Oyz и пересекающими Ox в точках $\pm at$. После прохождения точки в $Oxyz$ передним фронтом волны возмущение в ней сохранится бесконечно долго. Действительно, по принципу Гюйгенса в точку $M(x_0, 0, 0) \in Oxyz$ в момент времени $t > 0$ возмущение будет приходить из тех точек сферы $S_M^{at} \subset Oxyz$, которые лежат в плоскости Oyz, т.е. из точек окружности $\left\{(x, y, z) \middle| y^2 + z^2 = a^2t^2 - x_0^2, x = 0\right\}$. Поэтому при $t < \dfrac{|x_0|}{a} = t_{\min}$ в точке M покой, в момент времени $t_{\min}$ через M пройдет передний фронт волны, а во все моменты $t > t_{\min}$ в точку M будут приходить возмущения с указанной зависящей от t окружности.

4.4. Начально-краевые задачи для волнового уравнения в ограниченной области изменения пространственных переменных. Построение формальных решений методом разделения переменных. Задачи о резонансе

4.4.1. Пример постановки начально-краевой задачи

Приведем сначала пример ***первой*** (с краевыми условиями первого рода) ***начально-краевой задачи*** на отрезке:

$$u_{tt}(x,\ t) = a^2 u_{xx}(x,\ t) + f(x,\ t),\ 0 < x < l,\ 0 < t < +\infty, \quad (4.34)$$

$$u(0,\ t) = \mu_1(t),\ u(l,\ t) = \mu_2(t),\ 0 < t < +\infty, \qquad (4.35)$$

$$u(x,\ 0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x),\ 0 \le x \le l. \qquad (4.36)$$

Задачу (4.34)—(4.36) можно интерпретировать, например, как задачу о вынужденных поперечных колебаниях конечной однородной струны, если заданы законы движения ее концов $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$, а также поперечное смещение $\varphi(x)$ и поперечная скорость $\psi(x)$ в момент времени $t = 0$.

Под ***классическим решением*** задачи (4.34)—(4.36) следует понимать функцию $u(x,\ t)$, непрерывную в замкнутой области $\overline{Q} = \{0 \le x \le l\} \times \{0 \le t < +\infty\}$, имеющую непрерывные производные второго порядка в открытой области Q, удовлетворяющую в Q уравнению колебаний (4.34), на отрезке $0 \le x \le l$ — начальным условиям (4.36), а на его концах — краевым условиям (4.35). Классическое решение $u(x,t) \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$. Кроме того, естественно требовать непрерывного примыкания как $u(x,\ t)$, так и $u_t(x,\ t)$ к функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при $t \to 0+$ на отрезке $0 \le x \le l$. Для существования классического решения задачи (4.34) — (4.36) необходимы непрерывность функций f, μ_1, μ_2, ψ и непрерывная дифференцируемость функции φ, а также согласование начальных и краевых условий: $\mu_1(0) = \varphi(0)$, $\mu_2(0) = \varphi(l)$, $\dfrac{\partial \mu_1(0)}{\partial t} = \psi(0)$, $\dfrac{\partial \mu_2(0)}{\partial t} = \psi(l)$. Требования, гарантирующие существование классического решения, очень обременительны и не выполняются во многих задачах.

В силу линейности задачи (4.34)—(4.36) ее решение $u(x,\ t)$ можно представить в виде суммы решений трех задач: $u(x,\ t) = u_1(x,\ t) + u_2(x,\ t) + u_3(x,\ t)$, где $u_1(x,\ t)$ — решение задачи с однородным уравнением, однородными краевыми условиями и неоднородными начальными условиями; $u_2(x,\ t)$ — решение задачи с неоднородным уравнением и однородными краевыми и начальными условиями; $u_3(x,\ t)$ — решение задачи с однородным уравнением, однородными начальными условиями и неоднородными краевыми условиями. При этом задачу для $u_3(x,\ t)$ можно свести к первым двум задачам, например, заменой искомой функции

$$u_3(x,t) = v(x,t) + \frac{x}{l}\big(\mu_2(t) - \mu_1(t)\big) + \mu_1(t).$$

4.4.2. Классическое решение начально-краевой задачи

Пусть D — ***ограниченная область*** в пространстве или на плоскости, либо конечный интервал на прямой. Будем полагать, что в пространственном или в плоском случае граница S области D кусочно-гладкая и допускает применение формул Грина. Волновое уравнение относительно функции $u(M,\ t)$ было выведено лишь для ***внутренних точек*** области D, на границе S оно может и не выполняться. Чтобы выделить конкретный волновой процесс в $\overline{D}$, нужно обладать дополнительной информацией, которая часто дается на границе S. В качестве такой информации будем рассматривать локальные линейные краевые условия: Дирихле (первого рода), Неймана (второго рода) или третьего рода. Их можно записать единообразно в виде

$$\alpha(P)\frac{\partial u(P,t)}{\partial n_P}+\beta(P)u(P,t)=\chi(P,t),\ \ P\in S,$$

где $\mathbf{n}_P$ — вектор внешней по отношению к области D нормали к S в точке P.

Краевого условия на S недостаточно для определения конкретного решения волнового уравнения в D. Поставим еще начальные условия: для всех точек $M\in\overline{D}$ зададим начальное смещение $\varphi(M)$ и начальную скорость $\psi(M)$. Тогда в замкнутом цилиндре $\overline{Q}=\overline{D}\times[0,+\infty)$ получим ***начально-краевую задачу для волнового уравнения***:

$$u_{tt}=a^2\Delta_M u+f(M,t),\ \ (M,\ t)\in Q; \tag{4.37}$$

$$\alpha(P)\frac{\partial u(P,t)}{\partial n_P}+\beta(P)u(P,t)=\chi(P,t),\ \ P\in S,\ t\in(0,\ +\infty); \tag{4.38}$$

$$u(M,\ 0)=\varphi(M),\ u_t(M,\ 0)=\psi(M),\ \ M\in\overline{D}. \tag{4.39}$$

Общее краевое условие (4.38) может возникнуть, если в некоторых точках границы S задан закон движения точки на границе, в других точках S известны внешние силы, в третьих — внешние силы и силы упругого закрепления. Не будем рассматривать такое общее краевое условие в задачах в пространстве или на плоскости, но допускаем краевые условия разных типов в двух точках границы S, если $\overline{D}$ — отрезок прямой. Дадим определения классических решений начально-краевых задач с краевыми условиями первого, второго и третьего рода.

Определение 4.2. ***Классическим решением*** начально-краевой задачи в цилиндре $Q_T = D \times (0,\ T]$ называется функция $u(M,t) \in C^2(Q_T) \cap C^1\left(\overline{Q}_T\right)$, удовлетворяющая в Q_T уравнению (4.37), начальным условиям (4.39) в $\overline{D}$, и на $S \times (0,\ T]$ одному из краевых условий $u(P,\ t) = \mu(P,\ t)$, или $\dfrac{\partial u(P,t)}{\partial \mathbf{n}_P} = \nu(P,t)$, или $\dfrac{\partial u(P,t)}{\partial \mathbf{n}_P} + h(P)u(P,t) = \chi(P,t)$. В случае краевого условия Дирихле не требуется непрерывности первых производных вплоть до $S \times (0,\ T]$:

$$u(M,t) \in C^2(Q_T) \cap C\left(\overline{Q}_T\right) \cap C^1\left(\left\{D \times [0,T]\right\} \cup \left\{\overline{D} \times (t=0)\right\}\right).$$

Для существования классического решения необходимо выполнение следующих условий: $f \in C(Q_T)$, $\varphi \in C^1\left(\overline{D}\right)$, $\psi \in C\left(\overline{D}\right)$; μ, ν, χ — непрерывные функции на $S \times [0,\ T]$, причем при $P \in S$

$$\begin{cases} \varphi(P) = \mu(P,0), \\ \psi(P) = \mu_t(P,0), \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi(P)}{\partial n_P} = \nu(P,0), \\ \dfrac{\partial \psi(P)}{\partial n_P} = \nu_t(P,0), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi(P)}{\partial n_P} + h(P)\varphi(P) = \chi(P,0), \\ \dfrac{\partial \psi(P)}{\partial n_P} + h(P)\psi(P) = \chi_t(P,0). \end{cases}$$

Для единственности решения начально-краевой задачи с краевым условием третьего рода важно полагать, что $h(P) \geq 0$.

Случай неоднородного краевого условия заменой искомой функции легко сводится к случаю однородного краевого условия того же типа.

Замечание 4.12. Часто встречаются задачи, решения которых не могут удовлетворять требованиям, предъявляемым к классическим решениям. Если не выполняется согласование начальных и краевых условий или искомая функция $u(M,\ t)$ не может обладать требуемой гладкостью, то понятие решения начально-краевой задачи надо рассматривать в обобщенном смысле. Определение обобщенного решения основано на интегральном тождестве. Например, если $u(M,\ t)$ является классиче-

ским решением начально-краевой задачи ***с однородным краевым условием***

$$u(P,\ t) = 0,\ P \in S,\ 0 < t < T, \tag{4.40}$$

а заданные в задаче функции f и ψ рассматриваются как $f \in L_2(Q_T)$, $\psi \in L_2(D)$, то справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_{Q_T} \left(-u_t v_t + a^2 \left(\mathrm{grad}_M u, \mathrm{grad}_M v\right)\right) dD_M dt =$$

$$= \int\limits_{D\times(t=0)} \psi v dD_M + \int\limits_{Q_T} f v dD_M dt \tag{4.41}$$

для всех функций $v(M,t) \in C^1\left(\overline{Q}_T\right)$, удовлетворяющих условиям

$$v\big|_{D\times(t=T)} = 0 \tag{4.42}$$

и

$$v\big|_{S\times(0<t<T)} = 0. \tag{4.43}$$

Как и в п. 2.7.3, к понятию ***обобщенного решения начально-краевой задачи*** (4.37), (4.38), (4.39) придем, если надлежащим образом расширим класс удовлетворяющих (4.39) и (4.40) допустимых функций $u(M,\ t)$ и класс удовлетворяющих (4.42) и (4.43) допустимых функций $v(M,\ t)$, понимая выполнимость для них тождества (4.41) в смысле интегралов Лебега. ■

4.4.3. Метод разделения переменных

Построим ***формальное решение*** начально-краевой задачи для волнового уравнения с однородными краевыми условиями (первого, второго или третьего рода) ***методом разделения переменных***. Схема метода полностью повторяет изложенное в п. 2.3. для уравнения теплопроводности; надо лишь учесть, что волновое уравнение имеет второй порядок по времени t вместо первого.

Напомним метод разделения переменных на примерах задач с краевыми условиями первого рода.

Пример 4.6. Пусть задано однородное волновое уравнение с краевыми условиями первого рода

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l;\ t > 0; \tag{4.44}$$

$$u(0,\ t) = 0,\ u(l,\ t) = 0,\ t > 0; \tag{4.45}$$

$$u(x,\ 0) = \varphi(x),\ u_t(x,\ 0) = \psi(x),\ 0 \le x \le l. \tag{4.46}$$

Сначала найдем частные решения уравнения (4.44) вида $X(x)\,T(t)$, которые удовлетворяют краевым условиям (4.45). Если подставить произведение $X(x)\,T(t)$ в уравнение (4.44) и разделить его на $a^2 X(x)\,T(t)$, то получим $\dfrac{X''_{xx}(x)}{X(x)} = \dfrac{T''_{tt}(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda = \text{const}$. Отсюда и из краевых условий (4.45) имеем задачу Штурма—Лиувилля $\begin{cases} X''_{xx}(x) + \lambda X(x) = 0, 0 \le x \le l, \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$ с решением $\lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2$,

$X_n(x) = \sin\left(\dfrac{\pi n}{l} x\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ и уравнение ***второго порядка***

$T''_{tt}(t) + a^2 \lambda T(t) = 0$, которое надо решать при $\lambda = \lambda_n$. Его общее решение

$$T_n(t) = A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right),$$

поэтому решение $u(x,\ t)$ исходной задачи надо искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) \right] \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right).$$

Постоянные A_n и B_n можно найти из начальных условий. Для этого надо разложить заданные на $[0,\ l]$ функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды Фурье по системе функций $\left\{\sin\left(\dfrac{\pi n}{l} x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ на указанном отрезке:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),\ \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

$$\varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi,\quad \psi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l} \xi\right) d\xi.$$

Тогда из условия

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

получаем $A_n = \varphi_n$, а из условия

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{\pi na}{l}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

получаем $B_n=\dfrac{l}{\pi na}\psi_n$. Тем самым функциональный ряд $u(x,\,t)=$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n\cos\left(\frac{\pi na}{l}t\right)+\frac{l}{\pi na}\psi_n\sin\left(\frac{\pi na}{l}t\right)\right]\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$ является *формальным решением* задачи (4.44) — (4.46). Вопрос о том, в каком смысле построенный ряд является решением исходной задачи, требует отдельного рассмотрения. Классическое решение получим лишь при некоторых дополнительных предположениях о функциях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. ■

Пример 4.7. Пусть задано неоднородное волновое уравнение с краевыми условиями первого рода

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,\,t),\ 0<x<l;\ t>0, \tag{4.47}$$

$$u(0,\,t)=0,\ u(l,\,t)=0,\ t>0, \tag{4.48}$$

$$u(x,\,0)=0,\ u_t(x,\,0)=0,\ 0\le x\le l. \tag{4.49}$$

Решение задачи (4.47) — (4.49) можно искать в виде ряда Фурье по системе $\left\{\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \tag{4.50}$$

где коэффициенты Фурье $T_n(t)$ подлежат определению. Чтобы найти их, подставим предполагаемый вид решения (4.50) в уравнение (4.47), разложив $f(x,\,t)$ в ряд Фурье по $\left\{\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)\sin\frac{\pi n}{l}x=-a^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\sin\frac{\pi n}{l}x+\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где $f_n(t)=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(\xi,t)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi.$

Отсюда и из начальных условий (4.49) при каждом $n=1,\,2,\,3,\,\ldots$ получаем для нахождения $T_n(t)$ задачу Коши:

$$\begin{cases} T_n''(t) + a^2\left(\dfrac{\pi n}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t), t \geq 0, \\ T_n(0) = 0, T_n'(0) = 0. \blacksquare \end{cases}$$

Замечание 4.13. Решение задачи Коши

$$\begin{cases} T''(t) + a^2 \lambda T(t) = f(t), \lambda = \text{const}, t \geq 0, \\ T(0) = 0, T'(0) = 0 \end{cases}$$

имеет вид

$$T(t) = \frac{1}{\omega}\int_0^t \sin\left[\omega(t-\tau)\right] f(\tau)\, d\tau, \tag{4.51}$$

где $\omega = +\sqrt{\lambda}a$.

Действительно, $T(0) = 0$, $T'(t) = \int_0^t \cos\left[\omega(t-\tau)\right] f(\tau)\, d\tau$, поэтому $T'(0) = 0$, $T''(t) = -\omega\int_0^t \sin\left[\omega(t-\tau)\right] f(\tau)\, d\tau + f(t)$. ■

Решение задачи (4.47)—(4.49) построено в виде ряда (4.50), коэффициенты которого теперь известны:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin\left[\omega_n (t-\tau)\right] f_n(\tau)\, d\tau \right\} \sin\frac{\pi n}{l} x =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin\left[\omega_n (t-\tau)\right] \left(\frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, \tau) \sin\frac{\pi n}{l} \xi\, d\xi \right) d\tau \right\} \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

где $\omega_n = a\dfrac{\pi n}{l}$ (ω_n имеют смысл собственных частот рассматриваемой колебательной системы (4.47), (4.48); $[\omega_n] = \dfrac{1}{\text{с}}$).

Изменяя порядок интегрирований и суммирования (эта операция, вообще говоря, требует обоснования), получим формальное решение задачи (4.47)—(4.49) в виде

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi; t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau,$$

где $G(x, \xi; t) = \dfrac{2}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \sin\dfrac{\pi n}{l} x \sin\dfrac{\pi n}{l} \xi \sin \omega_n t.$ (4.52)

Функция G называется *функцией Грина* задачи (4.47)—(4.49), или функцией влияния ***мгновенного точечного импульса***. К этой функции приходим также, решая следующую задачу.

Задача 4.2. В момент времени $t = 0$ конечная однородная струна $0 \le x \le l$ с жестко закрепленными концами получает поперечный укол иголкой в точке x_0, $0 < x_0 < l$, передающий ей импульс I. Начальное поперечное смещение равно нулю. Начальная поперечная скорость струны в точках $x \ne x_0$ равна нулю. Найдите поперечное смещение $u(x, t)$ точек струны. ■

Решение. Пусть $\rho = \text{const}$ — линейная плотность массы струны (масса, приходящаяся на единицу длины). Тогда импульс элемента струны dx с координатой x в момент времени t равен $u_t(x, t)\rho\, dx$. Суммарный импульс, переданный струне, $I = \int_0^l u_t(x,0)\rho dx$; надо только указать, что этот импульс сосредоточен в точке x_0:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l;\ t > 0;$$
$$u(0, t) = 0,\ u(l, t) = 0,\ t \ge 0;$$
$$u(x, 0) = 0,\ u_t(x,0) = \frac{I}{\rho}\delta(x - x_0),\ 0 \le x \le l.$$

Здесь $\delta(x - x_0)$ — δ-функция, сосредоточенная в точке x_0 (см. п. 2.7.2).

Наличие в условии задачи ***мгновенного точечного импульса*** требует понимать ее решение в смысле обобщенных функций. Воспользуемся решением задачи (4.44)—(4.46) (в нашем случае $\varphi(x) \equiv 0, \psi(x) = \frac{I}{\rho}\delta(x - x_0)$):

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a}\psi_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l}t\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

где $\psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \frac{I}{\rho}\delta(\xi - x_0)\sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi = \frac{2I}{l\rho}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x_0\right)$ по определению δ-функции.

Итак, поперечное смещение $u(x, t)$, вызванное мгновенным точечным импульсом,

$$u(x,t)=\frac{I}{\rho}\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x_0\right)\sin\left(\frac{\pi n a}{l}t\right)=\frac{I}{\rho}G(x,x_0;t)$$

(см.(4.52)). ■

Замечание 4.14. В случае $\varphi(x)\equiv 0$ решение задачи (4.44)—(4.46) имеет вид

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{\pi n a}\left(\frac{2}{l}\int_0^l\psi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi\right)\sin\left(\frac{\pi n a}{l}t\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Снова формально изменяя порядок суммирования и интегрирования, выразим это решение через функцию Грина:

$$u(x,t)=\int_0^l G(x,\xi;t)\psi(\xi)d\xi.$$

Если здесь $\psi(x)=\dfrac{I}{\rho}\delta(x-x_0)$, то

$$u(x,t)=\int_0^l G(x,\xi;t)\frac{I}{\rho}\delta(\xi-x_0)d\xi=\frac{I}{\rho}G(x,x_0;t)$$

по определению δ-функции. ■

Если в начально-краевых задачах на отрезке вместо (4.45), (4.48) поставлены однородные краевые условия других типов, то получим задачу Штурма—Лиувилля с соответствующими им краевыми условиями. Это даст другие собственные значения λ_n и собственные функции $X_n(x)$.

Аналогично применяется метод разделения переменных для решения начально-краевых задач в ограниченных областях $D\subset\mathbb{R}^2$ или $D\subset\mathbb{R}^3$, если D имеет *достаточно простую геометрическую форму* (см. п. 2.3.7, 2.3.8).

4.4.4. Задачи о резонансе

В рамках математических моделей колебаний, описываемых начально-краевыми задачами для волнового уравнения, рассмотрим явление ***резонанса***. Если на колебательную систему (например, на струну или мембрану) оказывается периодическое воздействие с частотой, близкой к одной из частот ее собственных колебаний, то возможно резкое увеличение амплитуды вынужденных колебаний. Для простоты в качестве модели колебатель-

ной системы выберем какую-либо начально-краевую задачу для уравнения колебаний струны, подверженной периодическому внешнему воздействию. Подчеркнем модельный характер такого изучения резонанса:

— используем линейное волновое уравнение, описывающее малые колебания;

— не будем учитывать силы трения;

— будем полагать, что внешнее воздействие зависит от времени по гармоническому закону с частотой ω.

В указанных предположениях резонанс происходит при совпадении ω с одной из собственных частот колебаний ω_n. Он проявляется в том, что амплитуда вынужденных колебаний на частоте $\omega = \omega_{n_0}$ возрастает пропорционально времени.

Замечание 4.15. В реальных условиях всегда существуют причины, ограничивающие амплитуду колебаний:

- в колеблющейся системе имеется трение;
- вынуждающая частота ω неточно совпадает с собственной частотой ω_{n_0}.

С ростом амплитуды колебаний в случае резонанса эти колебания перестают быть малыми, и основанная на ***линейном*** волновом уравнении модель становится неприменимой: при большой амплитуде колебаний их собственная частота зависит от амплитуды. Поэтому, если частота ω вынуждающего воздействия не изменяется, то возможен выход колеблющейся системы из резонанса. ■

В задачах о резонансе будем считать вынуждающую частоту $\omega > 0$ параметром. Наличие или отсутствие резонанса в зависимости от ω рассмотрим на конкретном примере.

Пример 4.8.

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t), 0 < x < l, t > 0, \\ u(0,t) = \mu \sin(\omega t), \mu = \text{const}, u_x(l,t) = 0, t > 0, \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = 0, 0 \le x \le l. \end{cases}$$

Будем интерпретировать $u(x,\ t)$ как поперечное смещение струны $0 \le x \le l$ со свободным правым концом. До момента времени $t = 0$ струна находилась в состоянии покоя. При $t > 0$ левый конец струны движется по гармоническому закону, что и вызывает ее колебания. Распределенные вдоль струны внешние силы и сила трения не учитываются.

Выполним замену искомой функции $u(x,\,t) = v(x,\,t) + \mu\sin(\omega t)$. Тогда относительно $v(x,\,t)$ получим задачу

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t) = a^2 v_{xx}(x,t) + \mu\omega^2 \sin(\omega t), 0 < x < l, t > 0; \\ v(0,t) = 0, v_x(l,t) = 0, t > 0; \\ v(x,0) = 0, v_t(x,0) = -\mu\omega, 0 \le x \le l. \end{cases}$$

Представим функцию $v(x,\,t)$ в виде $v(x,\,t) = V(x,\,t) + W(x,\,t)$, где V удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} V_{tt}(x,t) = a^2 V_{xx}(x,t), 0 < x < l, t > 0; \\ V(0,t) = 0, V_x(l,t) = 0, t > 0; \\ V(x,0) = 0, V_t(x,0) = -\mu\omega, 0 \le x \le l, \end{cases} \tag{4.53}$$

а W — задаче

$$\begin{cases} W_{tt}(x,t) = a^2 W_{xx}(x,t) + \mu\omega^2 \sin(\omega t), 0 < x < l, t > 0; \\ W(0,t) = 0, W_x(l,t) = 0, t > 0; \\ W(x,0) = 0, W_t(x,0) = 0, 0 \le x \le l. \end{cases} \tag{4.54}$$

Разделяя переменные в задаче (4.53), получим задачу Штурма—Лиувилля на собственные значения:

$$\begin{cases} X''_{xx}(x) + \lambda X(x) = 0, 0 \le x \le l; \\ X(0) = 0, X'_x(l) = 0. \end{cases}$$

Ее решение: $\lambda_n = \left(\dfrac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2$, $X_n(x) = \sin\left(\dfrac{\pi(2n+1)}{2l}x\right)$, $n = 0$, 1, 2, ... Функцию $V(x,\,t)$ надо искать в виде

$$V(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\cos(\omega_n t) + B_n\sin(\omega_n t)\right]\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\right),$$

где $\omega_n = +\sqrt{\lambda_n}a = \dfrac{\pi(2n+1)}{2l}a$ — собственные частоты.

Из начального условия $V(x,0) = 0$ вытекает $A_n = 0$ при всех n. Из второго начального условия находим

$$B_n = -\frac{\omega}{\omega_n}\frac{4\mu}{\pi(2n+1)} = -\frac{\omega}{\omega_n^2}\frac{2\mu a}{l}.$$

Решение задачи (4.54) надо искать в виде ряда

$$W(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\sin\left(\frac{\pi(2n+1)}{2l}x\right).$$

Подставим его в уравнение и разложим неоднородность в уравнении в ряд Фурье по $\{X_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ на $0<x<l$ (в данном случае эта неоднородность $\mu\omega^2\sin(\omega t)$ не зависит от x). Тогда для определения коэффициентов $T_n(t)$ при каждом n получим задачу Коши:

$$\begin{cases}T_n''(t)+\omega_n^2T_n(t)=\dfrac{4\mu\omega^2}{\pi(2n+1)}\sin(\omega t),t\geq 0;\\ T_n(0)=0,T_n'(0)=0.\end{cases}$$

Ее решение:

$$T_n(t)=\frac{1}{\omega_n}\int_0^t\sin\left[\omega_n(t-\tau)\right]\sin(\omega\tau)d\tau\frac{4\mu\omega^2}{\pi(2n+1)}. \qquad (4.55)$$

Вычислим интеграл в (4.55). Если $\omega\neq\omega_n$ (***нерезонансный случай***), то

$$\int_0^t\sin\left[\omega_n(t-\tau)\right]\sin(\omega\tau)d\tau=\frac{1}{\omega_n^2-\omega^2}\left[\omega_n\sin(\omega t)-\omega\sin(\omega_n t)\right]$$

(проверьте!).

Снова учитывая, что $\dfrac{2}{\pi(2n+1)}=\dfrac{a}{\omega_n l}$, получим в нерезонансном случае $T_n(t)=\dfrac{2\mu a}{l}\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2\left(\omega_n^2-\omega^2\right)}\left[\omega_n\sin(\omega t)-\omega\sin(\omega_n t)\right]$.

Если же $\omega=\omega_{n_0}$ при некотором n_0 (***резонансный случай***), то

$$\int_0^t\sin\left[\omega(t-\tau)\right]\sin(\omega\tau)d\tau=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\omega t)}{\omega}-t\cos(\omega t)\right]$$

(проверьте!).

В этом резонансном случае $T_{n_0}(t)=\dfrac{\mu a}{l}\left[\dfrac{\sin(\omega t)}{\omega}-t\cos(\omega t)\right]$.

Ответ. Если $\omega\neq\omega_n$ при всех $n=0,1,2,\ldots$, то

$$u(x,t)=\mu\sin(\omega t)\left[1+\frac{2a\omega^2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)}{\omega_n\left(\omega_n^2-\omega^2\right)}\right]-$$

$$-\mu\frac{2a\omega}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(\omega_n t)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)}{\omega_n^2-\omega^2}.$$

Если $\omega=\omega_{n_0}$ при некотором n_0, то

$$u(x,t)=\mu\sin(\omega t)\left[1+\frac{2a\omega^2}{l}\sum_{\substack{n=0\\n\neq n_0}}^{\infty}\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)}{\omega_n\left(\omega_n^2-\omega^2\right)}-\frac{a}{\omega l}\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_0}}x\right)\right]-$$

$$-\mu t\cos(\omega t)\left[\frac{a}{l}\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_0}}x\right)\right]-\mu\frac{2a\omega}{l}\sum_{\substack{n=0\\n\neq n_0}}^{\infty}\frac{\sin(\omega_n t)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)}{\omega_n^2-\omega^2}.\ \blacksquare$$

4.5. Интеграл энергии. Единственность решений начально-краевых задач для волнового уравнения

4.5.1. Энергия колеблющейся системы

Интегралом энергии называется сумма кинетической и потенциальной энергий механической системы в некоторый момент времени. Пусть в ограниченной области $D\subset\mathbb{R}^n$, $n=1,2,3$, поставлена начально-краевая задача для волнового уравнения относительно $u=u(M,\,t)$:

$$u_{tt}(M,\,t)=a^2\Delta_M u(M,\,t)+f(M,\,t),\ M\in D,\ 0<t<+\infty;\quad(4.56)$$

$$u(M,\,0)=\varphi(M),\ u_t(M,\,0)=\psi(M), M\in\overline{D};\qquad(4.57)$$

$$\alpha(P)\frac{\partial u(P,t)}{\partial n_P}+\beta(P)u(P,t)=\chi(P,t),\ P\in S,\ 0<t<+\infty,\quad(4.58)$$

$$\alpha(P)\geq 0,\ \beta(P)\geq 0,\ \alpha(P)+\beta(P)\neq 0.$$

Определим сначала интеграл энергии в случае $f(M,\,t)\equiv 0$ и $\chi(P,\,t)\equiv 0$, т.е. не будем учитывать действующие в D и на границе S внешние силы. Обозначим через S^+ ту часть границы S,

где одновременно $\alpha(P) > 0$ и $\beta(P) > 0$. Тогда интегралом энергии называется величина (в случае $D \subset \mathbb{R}^3$)

$$\mathscr{E}(t) = \frac{\rho}{2} \iiint_D \left[\left(u_t(M,t) \right)^2 + a^2 \left| \operatorname{grad}_M u(M,t) \right|^2 \right] dD_M +$$

$$+ a^2 \frac{\rho}{2} \iint_{S^+} \frac{\beta(P)}{\alpha(P)} u^2(P,t) dS_P, \tag{4.59}$$

где dD_M — элемент объема; dS_P — элемент площади поверхности; $\rho = \text{const}$ имеет смысл объемной плотности массы (аналогично определяется интеграл энергии и в случаях $D \subset \mathbb{R}^2$ или $D \subset \mathbb{R}^1$).

Если (4.58) является краевым условием третьего рода $\dfrac{\partial u(P,t)}{\partial n_P} + h(P) u(P,t) = 0$, то $S^+ = S$, и второй член в (4.59) выражает энергию упругого закрепления; если (4.58) является краевым условием первого или второго рода, то $S^+ = \varnothing$, и второй член в (4.59) равен нулю. Очевидно, что $\dfrac{\rho}{2} \iiint_D \left(u_t(M,t) \right)^2 dD_M$ есть кинетическая энергия колеблющейся системы в момент времени t. Физический смысл величины $\mathscr{E}(t)$ состоит в том, что *в отсутствие внешних сил* полная энергия колеблющейся системы не меняется со временем — выполнен закон сохранения энергии: если $f(M, t) \equiv 0$ и $\chi(P, t) \equiv 0$, то при всех $t \geq 0$

$$\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}(0) = \frac{\rho}{2} \iiint_D \left[\psi^2(M) + a^2 \left| \operatorname{grad}_M \varphi(M) \right|^2 \right] dD_M +$$

$$+ a^2 \frac{\rho}{2} \iint_{S^+} \frac{\beta(P)}{\alpha(P)} \varphi^2(P) dS_P.$$

Энергия же системы, совершающей ***вынужденные колебания***, не сохраняется: система приобретает энергию за счет внешней силы; например, если f не равна тождественно нулю, а $\chi \equiv 0$, то $\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}(0) + \rho \int_0^t \iiint_D f(M,\tau) u_\tau(M,\tau) dD_M d\tau$ (ρf — объемная плотность внешней силы). Напомним, что в уравнении (4.56) трение не учитывается.

Интеграл энергии является ***функционалом***: функции u ставится в соответствие число $\mathscr{E}(t)$.

Пример 4.9. Пусть поперечные колебания струны описываются моделью

$$u_{tt}(x,\ t) = a^2 u_{xx}(x,\ t),\ 0 < x < l,\ 0 < t < +\infty;$$

$$u(x,\ 0) = \varphi(x),\ u_t(x,\ 0) = \psi(x),\ 0 \le x \le l;$$

$$u(0,\ t) = 0,\ u(l,\ t) = 0,\ 0 < t < +\infty.$$

В момент времени t струна имеет кинетическую энергию $\frac{\rho}{2}\int\limits_0^l \left(u_t(x,t)\right)^2 dx$ и потенциальную энергию $\frac{\rho}{2}\int\limits_0^l a^2 \left(u_x(x,t)\right)^2 dx$, где $\rho = \text{const}$ — линейная плотность массы. В этой модели внешние силы не учитываются, поэтому полная энергия колеблющейся струны не меняется со временем. Функцию $u(x,\ t)$ можно построить в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t), \tag{4.60}$$

где $u_n(x,t) = \left(A_n \cos\left(\frac{\pi n a}{l} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\pi n a}{l} t\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$, а коэффициенты A_n и B_n определяются из начальных условий. Ряд (4.60) представляет движение струны как сумму ***независимых движений***

$$u_n(x,t) = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}\cos\left(\omega_n t - \delta_n\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right),$$

где $\omega_n = \frac{\pi n a}{l},\ \delta_n = \text{arctg}\frac{B_n}{A_n}$.

Каждому такому движению $u_n(x,\ t)$ отвечает не меняющаяся со временем энергия

$$\mathscr{E}_n(t) = \frac{\rho}{2}\int\limits_0^l \left[\left(\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]dx = \frac{m}{4}\omega_n^2\left(A_n^2 + B_n^2\right),$$

где $m = \rho l$ — масса всей струны (вычислите самостоятельно!).

Тогда полная энергия струны

$$\mathscr{E}(t) = \frac{\rho}{2}\int\limits_0^l \left[\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2\right]dx = \frac{m}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n^2\left(A_n^2 + B_n^2\right)$$

не меняется со временем и определяется заданными функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Знание кинетической и потенциальной энергий струны в данной модели позволяет также построить функционал $\frac{\rho}{2}\int\limits_{t_1}^{t_2} dt \int\limits_{0}^{l}\left[\left(u_t(x,t)\right)^2 - a^2\left(u_x(x,t)\right)^2\right]dx$, который называется ***действием***. Согласно ***принципу наименьшего действия***, движение струны $u(x,\ t)$ происходит таким образом, что действие минимально. Можно доказать, что из этого принципа вытекает необходимое условие, которому должна удовлетворять функция $u(x,\ t)$: уравнение свободных колебаний $u_{tt} = a^2 u_{xx}$. ■

4.5.2. Единственность решений начально-краевых задач

Используем интеграл энергии в доказательстве единственности классического решения задачи (4.56)—(4.58); f и χ не равны тождественно нулю. Общую краевую задачу, когда тип краевого условия (4.58) зависит от точки $P \in S$, рассматривать не будем.

Теорема 4.7. Задача (4.56)—(4.58) может иметь только одно классическое решение в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$.

Доказательство. Пусть существуют два классических решения $u_1(M,\ t)$ и $u_2(M,\ t)$ задачи (4.56)—(4.58). Тогда функция $w(M,\ t) = u_1(M,\ t) - u_2(M,\ t)$ удовлетворяет задаче

$$w_{tt} = a^2\Delta_M w,\ (M,\ t) \in Q_\infty; \tag{4.61}$$

$$w(M,\ 0) = 0,\ w_t(M,\ 0) = 0,\ M \in \bar{D}; \tag{4.62}$$

$$\alpha(P)\frac{\partial w(P,t)}{\partial n_P} + \beta(P)w(P,t) = 0, P \in S,\ 0 < t < +\infty. \tag{4.63}$$

В задаче (4.61)—(4.63) построим зависящий от параметра t функционал $\mathscr{E}(t)$ вида (4.59). Докажем, что для краевых условий первого, второго и третьего рода определяемая функцией w величина $\mathscr{E}(t) \equiv 0$ при $t \geq 0$. Очевидно, что

$$\mathscr{E}(t) = \frac{\rho}{2}\left\{\iiint\limits_D \left[\left(w_t(M,t)\right)^2 + a^2\left|\operatorname{grad}_M w(M,t)\right|^2\right]dD_M + \right.$$

$$\left. + a^2 \iint\limits_{S^+} \frac{\beta(P)}{\alpha(P)} w^2(P,t)\,dS_P\right\} \geq 0, \quad \mathscr{E}(0) = 0.$$

Вычислим производную по параметру t:

$$\mathscr{E}_t(t) = \rho\left\{\iiint_D \left[w_t w_{tt} + a^2\left(\mathrm{grad}_M w, \mathrm{grad}_M w_t\right)\right] dD_M + \right.$$

$$\left. + a^2 \iint_{S^+} \frac{\beta}{\alpha} w w_t dS_P\right\}. \tag{4.64}$$

В первой формуле Грина (см. п. 3.2.1)

$$\iiint_D v\Delta_M U dD_M = \iint_S v\frac{\partial U}{\partial n_P} dS_P - \iiint_D \left(\mathrm{grad}_M U, \mathrm{grad}_M v\right) dD_M$$

положим $U(M, t) = w(M, t)$, $v(M, t) = w_t(M, t)$. Тогда

$$a^2 \iiint_D w_t \Delta_M w dD_M +$$

$$+ a^2 \iiint_D \left(\mathrm{grad}_M w, \mathrm{grad}_M w_t\right) dD_M = a^2 \iint_S w_t \frac{\partial w}{\partial n_P} dS_P. \tag{4.65}$$

Подставляя (4.65) в (4.64) и используя волновое уравнение (4.61), получим

$$\mathscr{E}_t(t) = \rho a^2 \left\{\iint_S w_t(P,t)\frac{\partial w(P,t)}{\partial n_P} dS_P + \iint_{S^+} \frac{\beta(P)}{\alpha(P)} w(P,t) w_t(P,t) dS_P\right\}.$$

В случае ***первой краевой задачи*** $S^+ = \varnothing$, а $w(P, t) = 0$ при $P \in S$ во все моменты времени $t \geq 0$, поэтому $w_t(P, t) = 0$ при $P \in S$. Отсюда $\mathscr{E}_t(t) \equiv 0$. Но $\mathscr{E}(0) = 0$, поэтому $\mathscr{E}(t) \equiv 0$.

В случае ***второй краевой задачи*** $S^+ = \varnothing$, а $\dfrac{\partial w(P,t)}{\partial n_P} = 0$ при $P \in S$ во все моменты времени $t \geq 0$. Отсюда $\mathscr{E}_t(t) \equiv 0$. Но $\mathscr{E}(0) = 0$, поэтому $\mathscr{E}(t) \equiv 0$.

В случае ***третьей краевой задачи*** $S^+ = S$, а краевое условие (4.63) имеет вид $\dfrac{\partial w(P,t)}{\partial n_P} + h(P) w(P,t) = 0$ $(\alpha(P) = 1, \beta(P) = h(P))$, поэтому

$$\mathscr{E}_t(t) = \rho a^2 \iint_S w_t(P,t)\left[\frac{\partial w(P,t)}{\partial n_P} + h(P) w(P,t)\right] dS_P \equiv 0.$$

Но $\mathscr{E}(0) = 0$, поэтому $\mathscr{E}(t) \equiv 0$. ■

Замечание 4.16. Используя первую формулу Грина на плоскости, можно аналогично доказать теорему единственности решения в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^2$. ■

Доказательство аналогичной теоремы в случае, когда $D \subset \mathbb{R}^1$, лишь техническими деталями отличается от предыдущего. Напомним начально-краевую задачу на отрезке:

$$u_{tt}(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) + f(x,t), 0 < x < l, t > 0; \tag{4.66}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), 0 \le x \le l; \tag{4.67}$$

$$\begin{gathered}\left[\alpha_1(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \beta_1(x)u(x,t)\right]\Big|_{x=0} = \chi_1(t); \\ \left[\alpha_2(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \beta_2(x)u(x,t)\right]\Big|_{x=l} = \chi_2(t), t \ge 0.\end{gathered} \tag{4.68}$$

Теорема 4.8. Задача (4.66) — (4.68) может иметь только одно классическое решение.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 4.7. Предположим, что существуют два решения $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Функция $w(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ удовлетворяет задаче

$$w_{tt}(x,t) = a^2 w_{xx}(x,t), 0 < x < l, t > 0;$$

$$w(x,0) = 0, w_t(x,0) = 0, 0 \le x \le l;$$

$$\left[\alpha_1(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \beta_1(x)w(x,t)\right]\Big|_{x=0} = 0; \ \ t \ge 0;$$

$$\left[\alpha_2(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \beta_2(x)w(x,t)\right]\Big|_{x=l} = 0, t \ge 0.$$

Введем функционал $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left(w_t^2(x,t) + a^2 w_x^2(x,t)\right)dx$. Из определения $E(t)$ и из начальных условий следует, что $E(t) \ge 0$, $E(0) = 0$.

Найдем производную функционала по времени:

$$\frac{dE}{dt} = \int_0^l \left(w_t(x,t)w_{tt}(x,t) + a^2 w_x(x,t)w_{xt}(x,t)\right)dx.$$

Интеграл $a^2\int\limits_0^l w_x(x,t)w_{xt}(x,t)dx$ вычислим по частям:

$$a^2\int\limits_0^l w_x(x,t)w_{xt}(x,t)dx =$$

$$= a^2\left(w_x(x,t)w_t(x,t)\right)\Big|_{x=0}^{x=l} - a^2\int\limits_0^l w_{xx}(x,t)w_t(x,t)dx.$$

Тогда получим

$$\frac{dE}{dt} = \int\limits_0^l \left(w_t\left(w_{tt} - a^2 w_{xx}\right)\right)dx + a^2\left(w_x(x,t)w_t(x,t)\right)\Big|_{x=0}^{x=l}.$$

Так как функция $w(x,\ t)$ удовлетворяет однородному уравнению колебаний, то

$$\frac{dE}{dt} = a^2\left(w_x(x,t)w_t(x,t)\right)\Big|_{x=0}^{x=l}.$$

В случае ***первой краевой задачи*** $w(0,\ t) = w(l,\ t) = 0$ во все моменты времени $t \geq 0$, поэтому $w_t(0,\ t) = w_t(l,\ t) = 0$. Отсюда $\dfrac{dE}{dt} = 0,\ E(t) = \text{const}$. Но $E(0) = 0$, поэтому $E(t) \equiv 0$.

В случае ***второй краевой задачи*** $w_x(0,\ t) = w_x(l,\ t) = 0$. Отсюда $\dfrac{dE}{dt} = 0$ и снова $E(t) \equiv 0$.

В ***третьей краевой задаче*** краевые условия имеют вид $w_x(0,t) - h_1 w(0,t) = 0,\ w_x(l,t) + h_2 w(l,t) = 0,\ h_1 = \text{const} \geq 0,\ h_2 = \text{const} \geq 0$, поэтому

$$\frac{dE}{dt} = -a^2 h_2 w(l,t)w_t(l,t) - a^2 h_1 w(0,t)w_t(0,t),$$

$$\frac{d}{dt}\left(E(t) + \frac{a^2 h_2}{2}w^2(l,t) + \frac{a^2 h_1}{2}w^2(0,t)\right) = 0,$$

$$E(t) + \frac{a^2 h_2}{2}w^2(l,t) + \frac{a^2 h_1}{2}w^2(0,t) = \text{const}.$$

Поскольку $E(0) = 0$ и $w(x,\ 0) = 0$, то

$$E(t) + \frac{a^2 h_2}{2}w^2(l,t) + \frac{a^2 h_1}{2}w^2(0,t) = 0$$

при всех $t \geq 0$. Так как $E(t) \geq 0$, $a^2 > 0$, $h_1 \geq 0$, $h_2 \geq 0$, то $E(t) \equiv 0$.

Следовательно, $E(t) \equiv 0$ для всех трех краевых задач. Отсюда получаем $w_t(x,\ t) = 0$ и $w_x(x,\ t) = 0$, $0 < x < l$, $t > 0$. Поэтому $w(x,\ t) = \text{const}$. Так как $w(x,\ 0) = 0$, то $w(x,\ t) \equiv 0$. ■

4.6. Доказательство существования классического решения первой начально-краевой задачи для уравнения колебаний струны на отрезке

Начально-краевая задача для волнового уравнения в ограниченной области D может не иметь ***классического решения.*** Может оказаться, что классическое решение существует, но доказать его существование очень трудно. В большинстве случаев решение такой задачи надо понимать в обобщенном смысле. Но если определяющие задачу функции удовлетворяют некоторым требованиям, то имеется ее классическое решение. В свою очередь, обобщенное решение можно рассматривать как предел классических решений задач, в определенном смысле приближающих исходную начально-краевую задачу.

Существование классического решения докажем на примере первой начально-краевой задачи на отрезке для однородного уравнения:

$$u_{tt}(x,\ t) = a^2 u_{xx}(x,\ t),\ 0 < x < l,\ 0 < t < +\infty; \tag{4.69}$$

$$u(0,\ t) = 0,\ u(l,\ t) = 0,\ 0 \leq t < +\infty; \tag{4.70}$$

$$u(x,\ 0) = \varphi(x),\ u_t(x,\ 0) = \psi(x),\ 0 \leq x \leq l. \tag{4.71}$$

Для существования классического решения необходимо полагать, что $\varphi(0) = 0$, $\varphi(l) = 0$, $\psi(0) = 0$, $\psi(l) = 0$.

Метод разделения переменных дает формальное решение задачи (4.69)—(4.71) в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos\left(\frac{\pi n}{l} at\right) + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l} at\right) \right) \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right), \tag{4.72}$$

где $\varphi_n = \dfrac{2}{l} \displaystyle\int_0^l \varphi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) d\xi$, $\psi_n = \dfrac{2}{l} \displaystyle\int_0^l \psi(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) d\xi$.

Чтобы доказать, что формальное решение (4.72) является классическим, нужны дополнительные предположения о входящих в условие задачи функциях φ и ψ.

Напомним (см. п. 2.4.1), что если функция $w(x) \in C^m[0,\ l]$ и имеет кусочно-непрерывную производную порядка $m+1$, причем

$$w^{(i)}(0) = w^{(i)}(l) = 0,\ 0 \le i \le m, \tag{4.73}$$

то сходится числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^m |w_n|$, где $w_n = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l w(\xi)\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}\xi\right)d\xi$.

При этом в (4.73) достаточно потребовать выполнения указанных равенств только для всех четных i, $0 \le i \le m$.

Теорема 4.9. Пусть в задаче (4.69)—(4.71) функция $\varphi(x) \in \in C^2[0,\ l]$ и имеет кусочно-непрерывную третью производную $\varphi^{(3)}(x)$ при $0 \le x \le l$; пусть $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ и $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$. Пусть функция $\psi(x) \in C^1[0,\ l]$ и имеет кусочно-непрерывную вторую производную $\psi''(x)$ при $0 \le x \le l$; пусть $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Тогда существует классическое решение задачи (4.69)—(4.71), представимое рядом (4.72).

Доказательство. Из предположений о функциях φ и ψ следует, что сходятся числовые ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |\varphi_n| \tag{4.74}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\psi_n|. \tag{4.75}$$

Функциональный ряд (4.72) мажорируется числовым рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(|\varphi_n| + \dfrac{l}{\pi n a}|\psi_n|\right)$, который сходится по признаку сравнения с рядами (4.74) и (4.75).

Поэтому по признаку Вейерштрасса ряд (4.72) сходится равномерно на множестве $\bar{Q} = \{0 \le x \le l, 0 \le t < +\infty\}$, и его сумма является непрерывной функцией в $\bar{Q}$.

В частности, при $t = 0$ имеем равномерную сходимость ряда Фурье функции $\varphi(x)$ по системе $\left\{\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ на отрезке $0 \le x \le l$. Таким образом, выполнено первое начальное условие $u(x, 0) = \varphi(x)$, $0 \le x \le l$.

Продифференцируем почленно ряд (4.72) один раз по переменной t:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{\pi n}{l}a\varphi_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+\psi_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \quad (4.76)$$

Функциональный ряд (4.76) мажорируется числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi n}{l}a|\varphi_n|+|\psi_n|\right)$, который сходится по признаку сравнения с рядами (4.74) и (4.75). По признаку Вейерштрасса ряд (4.76) сходится равномерно на множестве $\overline{Q}$, и его сумма является непрерывной функцией в $\overline{Q}$. В частности, при $t=0$ имеем равномерную сходимость ряда Фурье функции $\psi(x)$ по системе $\left\{\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ на отрезке $0\le x\le l$. Таким образом, выполнено второе начальное условие $u_t(x,0)=\psi(x)$, $0\le x\le l$. Итак, решение (4.72) непрерывно примыкает к начальным и краевым условиям.

Продифференцируем ряд (4.72) два раза по переменной t почленно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)^2\varphi_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)-\left(\frac{\pi n}{l}a\right)\psi_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \quad (4.77)$$

Функциональный ряд (4.77) мажорируется числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 n^2|\varphi_n|+\left(\frac{\pi a}{l}\right)n|\psi_n|\right)$, который сходится в силу сходимости рядов (4.74) и (4.75).

Продифференцируем ряд (4.72) два раза по переменной x почленно:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\varphi_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)-\left(\frac{\pi n}{l}\right)\frac{1}{a}\psi_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \quad (4.78)$$

Функциональный ряд (4.78) мажорируется числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2|\varphi_n|+\left(\frac{\pi}{la}\right)n|\psi_n|\right)$, который сходится в силу сходимости рядов (4.74) и (4.75).

Функциональные ряды (4.77) и (4.78) сходятся на множестве $Q = \{0 < x < l,\ 0 < t < +\infty\}$ равномерно, поэтому ряд (4.72) можно почленно дифференцировать два раза по t и по x, производные $u_{tt}(x, t)$ и $u_{xx}(x, t)$ непрерывны в Q, а сама функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (4.69). ■

Замечание 4.17. Проведенное выше доказательство основано на сходимости числовых рядов (4.74) и (4.75), которая следует из теоремы 2.8. Сходимость рядов (4.74) и (4.75) можно доказать непосредственно, не ссылаясь на указанные факты из теории рядов Фурье. Но для этого надо наложить более сильные условия на функции φ и ψ. ■

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.10. Пусть в задаче (4.69)—(4.71) функция $\varphi(x) \in C^3[0,l]$ и имеет кусочно-непрерывную четвертую производную $\varphi^{(4)}(x)$ при $0 \le x \le l$; пусть $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ и $\varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$. Пусть функция $\psi(x) \in C^2[0,l]$ и имеет кусочно-непрерывную третью производную $\psi^{(3)}(x)$ при $0 \le x \le l$; пусть $\psi(0) = \psi(l) = 0$ и $\psi''(0) = \psi''(l) = 0$. Тогда существует классическое решение задачи (4.69)—(4.71), представимое рядом (4.72).

Доказательство сходимости рядов (4.74) и (4.75) в данном случае следует из равенств

$$\varphi_n = \left(\frac{l}{\pi n}\right)^4 \frac{2}{l} \int_0^l \varphi^{(4)}(\xi) \sin\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) d\xi,$$

$$\psi_n = -\left(\frac{l}{\pi n}\right)^3 \frac{2}{l} \int_0^l \psi^{(3)}(\xi) \cos\left(\frac{\pi n}{l}\xi\right) d\xi,$$

которые получаются вычислением φ_n и ψ_n интегрированием по частям. Отсюда

$$|\varphi_n| \le \frac{1}{n^4} 2\left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \sup_{0 \le \xi \le l} \left|\varphi^{(4)}(\xi)\right| = \frac{\text{const}}{n^4},$$

$$|\psi_n| \le \frac{1}{n^3} 2\left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sup_{0 \le \xi \le l} \left|\psi^{(3)}(\xi)\right| = \frac{\text{const}}{n^3}. \ ■$$

4.7. Задачи об установившихся колебаниях в неограниченной области, условия единственности их решений

4.7.1. Амплитуда установившихся колебаний. Расходящиеся в бесконечность волны

Пусть $\mathbb{R}^3 = D \cup S \cup D'$, где D — ***ограниченная область*** с кусочно-гладкой границей S. Во всем пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим при $t > 0$ волновое уравнение $u_{tt}(M, t) = a^2 \Delta_M u(M, t) + g(M, t)$, в котором описывающая источники колебаний функция g всюду непрерывно дифференцируема, может быть отличной от нуля лишь в области D и ***периодична по времени***: $g(M, t) = a^2 f(M) \cos(\omega t)$. Если в начальный момент времени $u(M, 0) = 0$, $u_t(M, 0) = 0$, то можно считать, что из-за действия в D периодического источника колебаний при больших значениях времени t (при $t \to +\infty$) ***во всем пространстве*** установятся колебания с той же частотой ω. Установившиеся колебания — это колебания вида $u(M, t) = v(M) \cos(\omega t)$ с зависящей от точки $M \in \mathbb{R}^3$ амплитудой $v(M)$, которая удовлетворяет *уравнению Гельмгольца* (см. п. 1.1.9):

$$\Delta_M v(M) + k^2 v(M) = -f(M), \tag{4.79}$$

где $k = \dfrac{\omega}{a} = \text{const} > 0$; $f(M)$ — определенная всюду в $\mathbb{R}^3$ непрерывно дифференцируемая функция, $f(M) \equiv 0$ вне области D.

Кроме уравнения (4.79) надо учесть, что требуется найти амплитуду $v(M)$ волны, ***расходящейся*** от области D в бесконечность.

К однородному уравнению Гельмгольца в неограниченной области D' приводит также задача о нахождении монохроматической волны, отраженной от границы S тела D. При этом на поверхности S требуется поставить то или иное краевое условие, описывающее характер отражения (например, краевое условие Дирихле или Неймана). Если на D падает пришедшая из бесконечности плоская волна, зависящая от времени t по гармоническому закону с частотой ω, то можно считать, что при больших t (при $t \to +\infty$) ***всюду*** в D' установятся колебания с частотой ω, которые будут являться суммой падающей волны и отраженной от D. Чтобы найти амплитуду отраженной волны, снова надо

кроме однородного уравнения Гельмгольца в D' учесть, что это волна, ***расходящаяся*** от D в бесконечность. К более сложной задаче приводит явление дифракции (рассеяния) плоской монохроматической электромагнитной волны, падающей из бесконечности на тело D с некоторой диэлектрической постоянной и коэффициентом проводимости, если вокруг него пустота. Тогда следует рассматривать установившиеся колебания и внутри тела D, и вне его, что приведет к однородному уравнению Гельмгольца во всем пространстве $\mathbb{R}^3$, но с разрывным кусочно-постоянным коэффициентом: физические свойства тела D и окружающего его пространства различны. На границе S вместо уравнения должны выполняться условия сопряжения. Снова для нахождения амплитуды волны, полученной в результате дифракции на теле D, надо учесть, что она ***расходится*** от D в бесконечность.

В физике часто используют комплексную форму записи гармонических колебаний. Например, вместо плоской косинусоидальной волны $u(x,\, t) = A\cos(\omega t - kx + \alpha)(A = \text{const} > 0,$ $\omega = \text{const} > 0,\ k = \text{const} > 0,\ \alpha = \text{const})$, которая распространяется со скоростью ω/k вдоль положительного направления оси Ox, можно записать ее экспоненциальную форму $A\exp\{i(\omega t - kx + \alpha)\} = Ae^{i\alpha}e^{-ikx}e^{i\omega t},\ i = \sqrt{-1}$; физический смысл имеет только $u(x,t) = \mathrm{Re}\left[A\exp\{i(\omega t - kx + \alpha)\}\right]$. Вместо волны $A\cos(\omega t + kx + \alpha)$, которая распространяется в направлении против оси Ox, можно записать ее экспоненциальную форму $A\exp\{i(\omega t + kx + \alpha)\} = Ae^{i\alpha}e^{ikx}e^{i\omega t}$.

Вместо плоской синусоидальной волны $A\sin(\omega t - kx + \alpha)$ рассматривают $Ae^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}e^{ikx}e^{-i\omega t}$; физический смысл имеет только $\mathrm{Re}\left[A\exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2} - \omega t + kx - \alpha\right)\right\}\right]$. Вместо волны $A\sin(\omega t + kx + \alpha)$ рассматривают $Ae^{i\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}e^{-ikx}e^{-i\omega t}$.

В задачах об установившихся колебаниях вместо функции $u(M,\, t) = v(M)\cos(\omega t)$ удобно ввести комплекснозначную функцию $v(M)e^{i\omega t}$ и рассматривать $v(M)$ как ***комплекснозначную функцию*** точки M. Если вместо введенных выше периодических по времени зависимостей $g(M,\, t)$ и $u(M,\, t)$ выбрать $g(M,\, t) = a^2 f(M)\sin(\omega t)$ и $u(M,\, t) = v(M)\sin(\omega t)$, то удобно функцию $u(M,\, t)$

заменить на $v(M)\mathrm{e}^{-i\omega t}$ с комплекснозначной функцией $v(M)$. Тогда, например, $\Delta v(M) = \Delta(\mathrm{Re}v(M)) + i\Delta(\mathrm{Im}v(M))$. Уравнение Гельмгольца (4.79) надо теперь понимать как два равенства — отдельно для действительных частей входящих в него функций и отдельно для мнимых частей. Можно рассматривать (4.79) и как одно уравнение относительно комплекснозначной функции $v(M)$.

Уравнение Гельмгольца — это уравнение эллиптического типа. Отличие задачи для уравнения эллиптического типа в неограниченной области от задачи в ограниченной области состоит в том, что кроме краевого условия на границе S (если она есть), надо потребовать определенного поведения решения на бесконечности. Это требование должно быть естественным с физической точки зрения и должно обеспечивать единственность решения. Например, во внешней краевой задаче для уравнения Лапласа мы ищем регулярное на бесконечности решение: в пространстве решение должно равномерно стремиться к нулю на бесконечности, в аналогичной задаче на плоскости решение должно быть ограниченным на бесконечности. Такие же требования предъявляются к решениям внешних задач для уравнения Пуассона $\Delta v = -f$, если функция f достаточно гладкая и финитная (т.е. отлична от нуля лишь в некоторой ограниченной области). Для выделения единственного решения во внешней краевой задаче для уравнения Гельмгольца $\Delta v + k^2 v = -f$ такой же регулярности решения на бесконечности недостаточно (см. п. 1.1.9); нужны дополнительные требования к поведению решения на бесконечности, которые выделяли бы амплитуду $v(M)$ именно отыскиваемой в задаче ***расходящейся*** от D ***волны***. Необходимость таких дополнительных требований физического характера связана с тем, что принцип максимума для уравнения $\Delta v + cv = 0$ выполнен только при $c \leq 0$.

4.7.2. Условия излучения Зоммерфельда

Условия излучения Зоммерфельда — это требования к решению уравнения Гельмгольца (4.79) иметь определенное асимптотическое поведение на бесконечности. Они выделяют в неограниченной области $D' \subset \mathbb{R}^3$ амплитуду $v(M)$ *расходящейся* от D в бесконечность волны, источники которой находятся в ограниченной области D. Амплитуда волны, источники которой

находятся на бесконечности, не удовлетворяет условиям излучения.

Условия излучения можно получить эвристическими рассуждениями, проводя аналогию с плоскими волнами. Уравнение колебаний $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с одной пространственной переменной x описывает плоские волны $u_1(x,\ t) = f_1(x - at)$ и $u_2(x,\ t) = f_2(x + at)$, распространяющиеся соответственно вдоль положительного направления оси Ox и против Ox. При этом функция $u_1(x,\ t)$ удовлетворяет уравнению

$$u_t + au_x = 0, \tag{4.80}$$

но не удовлетворяет уравнению

$$u_t - au_x = 0, \tag{4.81}$$

а функция $u_2(x,\ t)$ удовлетворяет (4.81), но не удовлетворяет (4.80).

Пусть $u_1(x,\ t) = v_1(x)e^{i\omega t}$, $u_2(x,\ t) = v_2(x)e^{i\omega t}$, тогда из (4.80) и (4.81) получаем, что функция $v_1(x)$ удовлетворяет уравнению

$$v_x + ikv = 0, \tag{4.82}$$

но не удовлетворяет уравнению

$$v_x - ikv = 0, \tag{4.83}$$

а функция $v_2(x)$ удовлетворяет (4.83), но не удовлетворяет (4.82). Здесь $k = \dfrac{\omega}{a}$. (Что можно утверждать о функциях $v_1(x)$ и $v_2(x)$, если $u_1(x,\ t) = v_1(x)e^{-i\omega t}$, $u_2(x,\ t) = v_2(x)e^{-i\omega t}$?) Волна, создаваемая источниками, которые расположены в ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$, вдали от D подобна расходящейся сферической волне. В сферической системе координат в $\mathbb{R}^3$ в случае сферической симметрии волновое уравнение имеет вид

$$u_{tt}(r,t) = a^2 \Delta u(r,t) \equiv a^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) \equiv \frac{a^2}{r^2} \frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}.$$

Отсюда получаем расходящуюся в бесконечность сферическую волну $u_1(r,t) = \dfrac{1}{r} f_1(r - at)$ и приходящую из бесконечности сферическую волну $u_2(r,t) = \dfrac{1}{r} f_2(r + at)$; функции f_1 и f_2 естественно считать ограниченными. Заменяя в равенствах (4.80) и (4.81) переменную x на r, уже не получим выполнения этих ра-

венств для сферических волн $u_1(r,\ t)$ и $u_2(r\ ,\ t)$, но для $u_1(r,\ t)$ можно потребовать асимптотического выполнения (4.80) при $r \to +\infty$ с точностью до $o\left(\frac{1}{r}\right)_{r\to+\infty}$. Действительно,

$$\frac{\partial u_1(r,t)}{\partial t} + a\frac{\partial u_1(r,t)}{\partial r} = -\frac{a}{r^2} f_1(r-at) = o\left(\frac{1}{r}\right)_{r\to+\infty}.$$

Это соображение и приводит к требуемой аналогии с равенствами (4.82) и (4.83) для расходящейся от D в бесконечность волны.

Если в задаче об установившихся колебаниях временна́я зависимость имеет вид $u(M,\ t) = v(M)\mathrm{e}^{i\omega t}$ (косинусоидальная волна), то условия излучения в пространстве требуют от решения уравнения (4.79) следующего поведения:

$$\begin{cases} v = O\left(\frac{1}{r}\right)_{r\to+\infty}, & (4.84) \\ \frac{\partial v}{\partial r} + ikv = o\left(\frac{1}{r}\right)_{r\to+\infty}. & (4.85) \end{cases}$$

Если в задаче об установившихся колебаниях временна́я зависимость имеет вид $u(M,\ t) = v(M)\mathrm{e}^{-i\omega t}$ (синусоидальная волна), то условия излучения в пространстве требуют от решения уравнения (4.79) такого поведения:

$$\begin{cases} v = O\left(\frac{1}{r}\right)_{r\to+\infty}, & (4.86) \\ \frac{\partial v}{\partial r} - ikv = o\left(\frac{1}{r}\right)_{r\to+\infty}. & (4.87) \end{cases}$$

Условия (4.84) и (4.86) означают, что при больших r (при $r \to +\infty$) $u(M,\ t)$ подобна сферической волне.

Условия (4.85) и(4.87) означают, что это волна, ***расходящаяся*** от D в бесконечность. (Напомним, что через $O\left(\frac{1}{r}\right)_{r\to+\infty}$ обозначают такую функцию $p(r)$, что отношение $p(r)\Big/\left(\frac{1}{r}\right)$ остается

ограниченным при $r \to +\infty$; через $o\left(\frac{1}{r}\right)_{r\to+\infty}$ обозначают такую функцию $p(r)$, что при $r \to +\infty$ отношение $p(r)\Big/\left(\frac{1}{r}\right)$ стремится к нулю равномерно относительно всех направлений в пространстве.) Выделяемые условиями (4.85) и (4.87) решения различны.

Замечание 4.18. Для задач об установившихся колебаниях ***на плоскости*** ($D' \subset \mathbb{R}^2$) аналогами условий (4.84), (4.85) являются условия

$$\begin{cases} v = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)_{r\to+\infty}, \\ \frac{\partial v}{\partial r} + ikv = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)_{r\to+\infty}, \end{cases}$$

а аналогами условий (4.86), (4.87) являются условия

$$\begin{cases} v = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)_{r\to+\infty}, \\ \frac{\partial v}{\partial r} - ikv = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)_{r\to+\infty}. \end{cases} \blacksquare$$

Можно доказать, что условие (4.84) вытекает из уравнения Гельмгольца и условия (4.85); условие (4.8.6) вытекает из уравнения Гельмгольца и условия (4.87).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.11. Если $f \equiv 0$ вне ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^3$, то уравнение (4.79) не может иметь в $\mathbb{R}^3$ более одного решения, удовлетворяющего на бесконечности условиям (4.84), (4.85) (условиям (4.86), (4.87)).

4.8. Задача Коши с данными на кривой без характеристических точек. Задача Гурса с данными на характеристиках. Функция Римана

4.8.1. Задача Коши

В п. 4.1 была изучена задача Коши для уравнения поперечных колебаний струны. В этой задаче начальные условия ставились на лежащей в плоскости независимых переменных прямой γ, заданной уравнением $t = 0$, которая не является характеристикой уравнения колебаний. Записав уравнение свободных колебаний в его ***первой канонической форме*** (см. п. 1.2.5), можно проинтегрировать это уравнение и получить решение задачи Коши в виде формулы Даламбера.

Более общая постановка задачи Коши рассмотрена в п. 1.3. Напомним ее применительно к уравнению гиперболического типа с двумя независимыми переменными x, y, записанному в первой канонической форме: $u_{xy} = G(x, y, u, u_x, u_y)$. Будем рассматривать только случай ***линейного уравнения*** с непрерывными переменными коэффициентами:

$$u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y). \qquad (4.88)$$

Функцию f также предполагаем непрерывной. Пусть на плоскости Oxy фиксирована гладкая кривая γ, а в каждой ее точке — направление $\zeta(x, y)$, ***некасательное*** к γ; $|\zeta| = 1$. На кривой γ зададим дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\Psi_0(x, y)$ и непрерывно дифференцируемую функцию $\Psi_1(x, y)$.

Задача Коши: в односторонней или в двусторонней окрестности кривой γ на плоскости Oxy найти решение $u(x, y)$ уравнения (4.88), удовлетворяющее начальным условиям

$$u|_\gamma = \Psi_0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right|_\gamma = \Psi_1. \qquad (4.89)$$

Будем полагать, что γ *не содержит характеристических точек* уравнения (4.88) (см. п. 1.3.1). Если кривая γ задана уравнением $\omega(x, y) = 0$, то отсутствие характеристических точек означает, что $\omega_x(x, y) \neq 0$ и $\omega_y(x, y) \neq 0$ (докажите!). В случае задания γ уравнением $y = \mu(x)$ отсутствие характеристических точек означает, что производная $\mu'(x)$ всюду в рассматриваемой

области конечна и отлична от нуля; при задании γ уравнением $x = v(y)$ должна быть конечной и отличной от нуля $v'(y)$. Выразим это требование геометрически: кривая γ нигде не должна касаться характеристик; отсюда следует, что любая характеристика уравнения (4.88) может пересечь кривую γ не более чем в одной точке. (Напомним, что (4.88) имеет два семейства характеристик: $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$.)

Конкретизируем постановку задачи Коши. Пусть для определенности кривая γ задана уравнением $y = \mu(x)$ и пересекает оси Ox и Oy в точках $C_0(x_0, 0)$ и $B_0(0, y_0)$ соответственно, где $x_0 > 0$ и $y_0 > 0$; производная $\mu'(x) < 0$ и конечна при $0 \le x \le x_0$. Точки B_0 и C_0 определяют точку $O' = O'(x_0, y_0)$. Обозначим через T_0' криволинейный треугольник на плоскости Oxy, ограниченный отрезками прямых $O'B_0$, $O'C_0$, и дугой $\gamma_{B_0C_0}$ кривой γ. В качестве направления $\boldsymbol{\zeta}$ выберем направление нормали $\mathbf{n}$ к кривой γ в каждой ее точке.

Задача Коши для уравнения (4.88) в области T_0': найти функцию $u \in C^1\left(\overline{T}_0'\right)$, которая имеет смешанную производную $u_{xy} \in C\left(T_0'\right)$, удовлетворяет уравнению (4.88) в T_0' и начальным условиям

$$u\big|_\gamma = \Psi_0\left(x, \mu(x)\right), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\gamma = \Psi_1\left(x, \mu(x)\right). \tag{4.90}$$

Из одних лишь условий (4.90) можно найти значения производных $u_x\big|_\gamma$ и $u_y\big|_\gamma$. Действительно, дифференцируя по x первое условие в (4.90), получим

$$u_x\big|_\gamma + \mu'(x) u_y\big|_\gamma = \frac{d}{dx}\Psi_0\left(x, \mu(x)\right). \tag{4.91}$$

Поскольку кривая γ задана уравнением $\omega(x, y) \equiv \mu(x) - y = 0$, вектор $\{\omega_x(x, y), \omega_y(x, y)\} = \{\mu'(x), -1\}$ является нормалью к γ в каждой точке $(x, y) \in \gamma$. Нормируем этот вектор: $\mathbf{n} = \dfrac{\{\mu'(x), -1\}}{\sqrt{\left(\mu'(x)\right)^2 + 1}}$. Тогда второе условие в (4.90) означает

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\gamma = (\operatorname{grad} u, \mathbf{n})\big|_\gamma =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\mu'(x)\right)^2 + 1}}\left(\mu'(x) u_x\big|_\gamma - u_y\big|_\gamma\right) = \Psi_1\left(x, \mu(x)\right). \tag{4.92}$$

Таким образом, получена система линейных алгебраических уравнений (4.91), (4.92) относительно $u_x\big|_\gamma$, $u_y\big|_\gamma$ с отличным от нуля определителем матрицы коэффициентов.

Замечание 4.19. Существенно только то, что направление ζ, по которому берется производная в (4.89), ***не касательное*** к γ. Например, можно в качестве ζ выбрать положительное направление оси Oy. Тогда в (4.89) дана $u_y\big|_\gamma$, и из (4.89) можно найти $u_x\big|_\gamma$ (проверьте!). ■

Задача 4.3. Если бы в некоторой точке $K \in \gamma$ направление ζ было выбрано касательным к γ, то какому требованию пришлось бы подчинить функции Ψ_0 и Ψ_1 в точке K? Однозначно ли тогда заданы $u_x\big|_K$ и $u_y\big|_K$? ■

Аналогична постановка задачи Коши в криволинейном треугольнике T_0, ограниченном отрезками прямых OC_0, OB_0 и дугой $\gamma_{C_0B_0}$ кривой γ. Такую же задачу можно поставить и в прямоугольнике $\Pi_0 = OC_0O'B_0$: функция $u \in C^1\left(\overline{\Pi}_0\right)$, $u_{xy} \in C(\Pi_0)$, $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (4.88) в Π_0 и начальным условиям (4.90) на лежащей в Π_0 части кривой γ.

Оказывается, что при естественных требованиях к функциям a, b, c, f *задача Коши корректна* — ее решение существует, оно единственно и устойчиво по отношению к возмущениям Ψ_0, Ψ_1и f. Значение решения в произвольной точке $M \in \Pi_0$ можно получить в явном виде (подобно формуле Даламбера). Однако для этого надо решить задачу, принципиально отличающуюся от задачи (4.88), (4.90), — ***задачу Гурса*** с данными на характеристиках.

Замечание 4.20. Почему мы наложили запрет на характеристические точки на кривой γ? Пусть функция $\mu(x)$ не возрастает (или даже строго убывает) при $0 \le x \le x_0$, $\mu \in C^2$, и в некоторой точке $\tilde{x}$ ее производная $\mu'(\tilde{x}) = 0$. Тогда точка $H\left(\tilde{x}, \mu(\tilde{x})\right) \in \gamma$ является характеристической точкой кривой γ, и $\mu''(\tilde{x}) = 0$. Пусть в окрестности точки H функция$u \in C^2$ и удовлетворяет уравнению (4.88). В точке H равенства (4.91), (4.92) дают

$$u_x\big|_H = \frac{d}{dx}\Psi_0\left(x, \mu(x)\right)\Big|_H, \quad u_y\big|_H = -\Psi_1\left(x, \mu(x)\right)\Big|_H.$$

Продифференцируем (4.91), (4.92) по x (умножив сначала (4.92) на $\sqrt{(\mu')^2+1}$) и запишем полученные равенства в точке H:

$$u_{xx}\big|_H = \frac{d^2}{dx^2}\Psi_0\big(x,\mu(x)\big)\Big|_H, \quad u_{xy}\big|_H = -\frac{d}{dx}\Psi_1\big(x,\mu(x)\big)\Big|_H.$$

Тогда уравнение (4.88) накладывает требование, которому в точке H должны удовлетворять функции Ψ_0 и Ψ_1:

$$u_{xy}\big|_H = \big(f - au_x - bu_y - cu\big)\big|_H = -\frac{d}{dx}\Psi_1\big(x,\mu(x)\big)\Big|_H,$$

т.е.

$$f\big|_H - \left(a\frac{d}{dx}\Psi_0\big(x,\mu(x)\big)\right)\Big|_H + \big(b\Psi_1\big(x,\mu(x)\big)\big)\big|_H - \big(c\Psi_0\big(x,\mu(x)\big)\big)\big|_H =$$

$$= -\frac{d}{dx}\Psi_1\big(x,\mu(x)\big)\big|_H. \qquad (*)$$

Если условие (*) не выполнено, то задача (4.88), (4.90) неразрешима; если оно выполнено, то на значение $u_{xx}\big|_H$ накладывается дополнительное требование, которое осложняет исследование задачи Коши.

Аналогично рассматривается случай $\mu'(\tilde{x}) = -\infty$, который означает, что в окрестности точки H кривая γ задана уравнением $x = \nu(y)$, причем $\nu'(\tilde{y}) = 0$; характеристическая точка $H = H(\tilde{x},\tilde{y})$.

Можно ли отказаться от монотонности функции $\mu(x)$ на $0 \le x \le x_0$ при задании гладкой кривой γ? Для немонотонной $\mu(x)$ найдется точка $H(\tilde{x},\tilde{y}) \in \gamma$, в которой $\mu'(\tilde{x}) = 0$, а в некоторой окрестности точки H $\mu(x) \ge \mu(\tilde{x})$ (или $\mu(x) \le \mu(\tilde{x})$). Сохраним предположения $\mu \in C^2$, $u \in C^2$. Теперь, возможно, $\mu''(\tilde{x}) \ne 0$. Дифференцируя (4.91), (4.92), получим в точке H условие, аналогичное условию (*), но содержащее $\mu''(\tilde{x})$ (найдите это требование к Ψ_0 и Ψ_1). Заметьте, что в случае немонотонной $\mu(x)$ некоторые характеристики семейства $y = \text{const}$ пересекут γ более чем в одной точке. ■

Задача 4.4. Пусть уравнение гиперболического типа с двумя независимыми переменными x и t записано во *второй канонической форме*. Какому требованию должна удовлетворять кривая γ на Oxt, заданная уравнением $\omega(x,\, t) = 0$, чтобы на ней не было характеристических точек?

Ответ: $\big(\omega_x(x,t)\big)^2 \ne \big(\omega_t(x,t)\big)^2$. ■

4.8.2. Формально сопряженные дифференциальные операции. Формула Грина

В основе ***метода Римана*** построения решения задачи (4.88), (4.90) лежит ***формула Грина***.

Теорема 4.12. Пусть D — ограниченная область на плоскости Oxy с кусочно-гладкой границей Г. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в замкнутой области $\overline{D}$ и имеют непрерывные частные производные первого порядка в D. Пусть существуют (хотя бы как несобственные) интегралы $\iint\limits_D \dfrac{\partial P}{\partial x}dxdy$, $\iint\limits_D \dfrac{\partial P}{\partial y}dxdy$, $\iint\limits_D \dfrac{\partial Q}{\partial x}dxdy$, $\iint\limits_D \dfrac{\partial Q}{\partial y}dxdy$. Тогда справедлива формула Грина:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy. \tag{4.93}$$

В левой части уравнения (4.88) записана дифференциальная операция

$$L_{x,y}u = u_{xy} + au_x + bu_y + cu. \tag{4.94}$$

Будем полагать, что функции $a(x, y)$, $b(x, y)$, $a_x(x, y)$, $b_y(x, y)$ непрерывны в некоторой замкнутой ограниченной области $\overline{D} \subset Oxy$ с кусочно-гладкой границей Г. Введем в $\overline{D}$ дифференциальную операцию

$$L^*_{x,y}v = v_{xy} - \big(av\big)_x - \big(bv\big)_y + cv = v_{xy} - av_x - bv_y + \big(c - a_x - b_y\big)v \tag{4.95}$$

над функцией $v = v(x, y)$. Операция L^* называется ***формально сопряженной*** с операцией L. Операции L и L^* будем применять к функциям $u \in C^1\left(\overline{D}\right)$ и $v \in C^1\left(\overline{D}\right)$, смешанные производные u_{xy}, v_{xy} которых непрерывны в $\overline{D}$. Функции Lu и L^*v связаны тождеством $2\big[vLu - uL^*v\big] = \big(u_xv - v_xu + 2buv\big)_y + \big(u_yv - v_yu + 2auv\big)_x$ (проверьте!). Положим $P(x, y) = -\big(u_xv - v_xu + 2buv\big)$, $Q(x, y) = \big(u_yv - v_yu + 2auv\big)$ и применим к выбранным P и Q формулу Грина (4.93). Тогда получим

$$2\iint\limits_D \big[vLu - uL^*v\big]dxdy = \oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy. \tag{4.96}$$

Формула (4.96) также называется *формулой Грина.*

4.8.3. Формула Римана

Предположим, что решение $u(x, y)$ задачи (4.88), (4.90) в криволинейном треугольнике T_0' существует. Построим формулу, дающую это решение. Фиксируем произвольную точку $M(\xi,\eta) \in T_0'$; ее координаты ξ, η далее будем считать параметрами. Проведем через точку M прямые, параллельные осям координат, до их пересечения с кривой γ в точках $B(x_\gamma, \eta)$ и $C(\xi, y_\gamma)$, где x_γ однозначно определяется из уравнения $\eta = \mu(x_\gamma)$, а $y_\gamma = \mu(\xi)$. На плоскости Oxy получили криволинейный треугольник T, ограниченный отрезками прямых MB, MC и дугой γ_{BC} кривой γ. По исходному предположению функция $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению $L_{x,y}u = f(x, y)$ в области T_0'. Предположим, что в области T известно решение $v(x, y)$ однородного сопряженного уравнения $L^*_{x,y}v = 0$. Применим формулу (4.96) к функциям u, v в области T; контур Γ состоит из дуги кривой γ_{BC} и отрезков прямых CM и MB (обход контура Γ производим так, чтобы ограниченная им область T оставалась слева):

$$2\iint\limits_T \left[vL_{x,y}u - uL^*_{x,y}v\right]dxdy = 2\iint\limits_T vf dxdy = \tag{4.97}$$
$$= \int\limits_{\gamma_{BC}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{CM} Q(x,y)dy + \int\limits_{MB} P(x,y)dx.$$

Учтем, что $-P(x, y) = (uv)_x + 2u(bv - v_x)$, $Q(x, y) = (uv)_y + 2u(av - v_y)$. Тогда

$$\int\limits_{CM} Qdy = (uv)\big|_M - (uv)\big|_C + \int\limits_{CM} 2u\left(av - v_y\right)dy,$$

$$\int\limits_{MB} Pdx = -\int\limits_{BM} Pdx = (uv)\big|_M - (uv)\big|_B + \int\limits_{BM} 2u\left(bv - v_x\right)dx.$$

Теперь формулу (4.97) можно записать следующим образом:

$$2(uv)\big|_M = (uv)\big|_B + (uv)\big|_C + 2\iint\limits_T vfdxdy - \int\limits_{\gamma_{BC}} Pdx + Qdy - \tag{4.98}$$
$$- \int\limits_{BM} 2u\left(bv - v_x\right)dx - \int\limits_{CM} 2u\left(av - v_y\right)dy.$$

Обратим в нуль последние два члена в (4.98). Для этого потребуем, чтобы функция $v(x, y)$ дополнительно удовлетворяла условиям $v_x(x, \eta) = b(x, \eta)v(x, \eta)$ на BM и $v_y(\xi, y) = a(\xi, y)v(\xi, y)$ на CM. Кроме того, выберем значение $v\big|_M = v(\xi,\eta) = 1$. Это зна-

чит, что решение $v(x,\,y)$ уравнения $L^*_{x,y}v=0$ мы подчинили условиям

$$v(x,\eta)=\exp\int\limits_{\xi}^{x}b(\theta,\eta)d\theta \text{ на } BM \text{ (при } y=\eta,\ x_\gamma\le x\le\xi),\tag{4.99}$$

$$v(\xi,y)=\exp\int\limits_{\eta}^{y}a(\xi,\theta)d\theta \text{ на } CM \text{ (при } x=\xi,\ y_\gamma\le y\le\eta).\tag{4.100}$$

Такое решение однородного сопряженного уравнения зависит от координат ξ, η точки M как от параметров, т.е. является функцией двух точек $(x,\,y)$ и $(\xi,\,\eta)$; его принято обозначать $R(x,\,y;\,\xi,\,\eta)$ и называть ***функцией Римана***.

Функция R не зависит ни от данных Коши на γ, ни от вида этой кривой. Чтобы построить $R(x,\,y;\,\xi,\,\eta)$, надо решить задачу для уравнения $L^*_{x,y}R=0$ с условиями (4.99), (4.100) *на отрезках характеристик* этого уравнения. Задача с данными на выходящих из одной точки характеристиках называется ***задачей Гурса***; ее постановка полностью отлична от постановки задачи Коши (4.88), (4.89).

Если бы мы знали функцию Римана $R(x,\,y;\,\xi,\,\eta)$, то могли бы записать решение $u(\xi,\,\eta)$ задачи Коши (4.88), (4.90), пользуясь формулой (4.98):

$$\begin{aligned}u(\xi,\eta)=&\frac{1}{2}\Psi_0\left(x_\gamma,\eta\right)R\left(x_\gamma,\eta;\xi,\eta\right)+\frac{1}{2}\Psi_0\left(\xi,y_\gamma\right)R\left(\xi,y_\gamma;\xi,\eta\right)+\\&+\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma_{BC}}\left[\left(u_x+2b\Psi_0\right)R-R_x\Psi_0\right]dx-\left[\left(u_y+2a\Psi_0\right)R-R_y\Psi_0\right]dy+\\&+\iint\limits_{T}R(x,y;\xi,\eta)f(x,y)dxdy.\end{aligned}\tag{4.101}$$

Формула (4.101) называется ***формулой Римана***. В наших рассуждениях она дает пока только формальное решение задачи Коши. Чтобы убедиться в существовании функции Римана, надо изучить задачу Гурса. Чтобы убедиться в существовании решения задачи (4.88), (4.90), надо проверить выполнение всех условий этой задачи для функции $u(\xi,\,\eta)$, заданной формулой (4.101).

Задача 4.5. Выберем точку $M(\xi,\,\eta)$ не в треугольнике T_0', а в треугольнике T_0 — ниже кривой γ. Получите формулу Римана в этом случае.

Указание. В (4.101) надо изменить знак перед $\int\limits_{\gamma_{BC}}$. ■

Задача 4.6. Пусть кривая γ без характеристических точек задана уравнением $y = \mu(x)$, $\mu'(x) > 0$, и пересекает границу прямоугольника Π_0 в точках O и O'. Постройте для задачи Коши формулу Римана для этого случая (точка M может лежать как выше кривой γ, так и ниже). ■

4.8.4. Задача Гурса

Задача Гурса для уравнения (4.88): найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую в прямоугольнике $\Pi_0 = \{0 < x < x_0\} \times \{0 < y < y_0\}$ уравнению (4.88) и условиям

$$u(x, 0) = \varphi_1(x),\ 0 \le x \le x_0;\ u(0, y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le y_0, \quad (4.102)$$

на отрезках характеристик уравнения (4.88), выходящих из точки O. Полагаем, что задающие уравнение (4.88) функции a, b, c, f непрерывны в $\overline{\Pi}_0$. Полагаем, что $\varphi_1 \in C^1[0, x_0]$, $\varphi_2 \in C^1[0, y_0]$, причем $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Решением задачи Гурса в $\overline{\Pi}_0$ будем называть функцию $u \in C^1(\overline{\Pi}_0)$, которая удовлетворяет (4.88) и (4.102).

Теорема 4.13. *Задача Гурса корректна*, т.е. ее решение в $\overline{\Pi}_0$ существует, оно единственно и устойчиво по отношению к возмущениям f, φ_1, φ_2.

Доказательство. Идея доказательства состоит в сведении задачи (4.88), (4.102) к системе трех интегральных уравнений. Положим $v(x, y) = u_x(x, y)$, $w(x, y) = u_y(x, y)$. Тогда для решения задачи (4.88), (4.102) справедливы уравнения

$$\begin{cases} u(x,y) = \varphi_1(x) + \int\limits_0^y w(x,\theta)\,d\theta, \\ v(x,y) = \varphi_1'(x) + \int\limits_0^y (f - av - bw - cu)\big|_{(x,\theta)}\,d\theta, \\ w(x,y) = \varphi_2'(y) + \int\limits_0^x (f - av - bw - cu)\big|_{(\theta,y)}\,d\theta \end{cases} \quad (4.103)$$

(проверьте!). Обратно, если функции u, v, w непрерывны в $\overline{\Pi}_0$ и удовлетворяют системе уравнений (4.103), то функция $u \in C^1(\overline{\Pi}_0)$ и является решением задачи (4.88), (4.102) (существование не-

прерывной u_{xy} следует из (4.103) автоматически). Тем самым система (4.103) эквивалентна задаче Гурса.

Решение системы (4.103) можно построить ***методом последовательных приближений*** (методом итераций)

$$\begin{cases} u_n(x,y) = \int\limits_0^y w_{n-1}(x,\theta)d\theta, \\ v_n(x,y) = -\int\limits_0^y \left(av_{n-1} + bw_{n-1} + cu_{n-1}\right)\Big|_{(x,\theta)} d\theta, \\ w_n(x,y) = -\int\limits_0^x \left(av_{n-1} + bw_{n-1} + cu_{n-1}\right)\Big|_{(\theta,y)} d\theta \end{cases}$$

с начальным приближением

$$\begin{cases} u_0(x,y) = \varphi_1(x), \\ v_0(x,y) = \varphi_1'(x) + \int\limits_0^y f(x,\theta)d\theta, \\ w_0(x,y) = \varphi_2'(y) + \int\limits_0^x f(\theta,y)d\theta. \end{cases}$$

Нетрудно установить следующие факты. В прямоугольнике $\bar{\Pi}_0$ итерационный процесс $\{u_n,\ v_n,\ w_n\}$ равномерно сходится к непрерывным функциям $\{u,\ v,\ w\}$. Решение линейной системы уравнений (4.103) единственно и непрерывно зависит от входных данных f, φ_1, φ_2. ■

Замечание 4.21. Производные решения u_x, u_y, u_{xy} также устойчивы по отношению к возмущению функции f (в смысле $\|\cdot\|_{C(\bar{\Pi}_0)}$) и к возмущениям функций φ_1, φ_2 (в смысле $\|\cdot\|_{C^1[0,x_0]}$ и $\|\cdot\|_{C^1[0,y_0]}$). ■

Задача 4.7. Докажите, что решение задачи Гурса для уравнения (4.88) с данными $u(x,\,0) = 0,\ 0 \le x \le x_0$; $u(0,\,y) = 0,\ 0 \le y \le y_0$, в точке $M(\xi,\,\eta) \in \Pi_0$ имеет вид

$$u(\xi,\eta) = \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\eta R(x,y;\xi,\eta) f(x,y)\,dx\,dy.$$

Указание. Используйте формулу (4.96). ■

Замечание 4.22. Задача Гурса является математической моделью некоторых реальных процессов. Она встречается при изучении динамики сорбции газов, при описании процессов сушки. ■

4.8.5. Функция Римана

Корректность задачи Гурса позволяет обосновать существование функции Римана: как было показано, функция Римана должна удовлетворять задаче такого типа со специальными данными на характеристиках.

Определение 4.3. Пусть точки $(x,\, y)$ и $(\xi,\, \eta)$ пробегают прямоугольник $\overline{\Pi}_0$. ***Функцией Римана*** уравнения $L_{x,y}u \equiv u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f$ в Π_0 называется функция $R(x,\, y;\, \xi,\, \eta)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) сама функция R и ее производные R_x, R_y, R_{xy} непрерывны по совокупности переменных $(x,\, y;\, \xi,\, \eta)$ в $\overline{\Pi}_0 \times \overline{\Pi}_0$;

2) для каждой фиксированной точки $(\xi,\, \eta)$ функция R удовлетворяет задаче Гурса для однородного сопряженного уравнения

$$L^*_{x,y}R \equiv R_{xy} - (aR)_x - (bR)_y + cR = 0 \ \text{ в } \ \overline{\Pi}_0, \tag{4.104}$$

$$R(x,\eta;\xi,\eta) = \exp\int_{\xi}^{x} b(\theta,\eta)\,d\theta,\ R(\xi,y;\xi,\eta) = \exp\int_{\eta}^{y} a(\xi,\theta)\,d\theta. \tag{4.105}$$

Замечание 4.23. $L^{**} = L$. Поэтому функция Римана $R^*(x,\, y;\, \xi,\, \eta)$ *сопряженного уравнения* $L^*_{x,y}u \equiv u_{xy} - (au)_x - (bu)_y + cu = f$ в Π_0 (см.(4.95)) — это функция, непрерывная в $\overline{\Pi}_0 \times \overline{\Pi}_0$ по совокупности переменных $(x,\, y;\, \xi,\, \eta)$ вместе с производными R^*_x, R^*_y, R^*_{xy} и удовлетворяющая задаче Гурса $L_{x,y}R^* \equiv R^*_{xy} + aR^*_x + bR^*_y + cR^* = 0$ в Π_0;

$$R^*(x,\eta;\xi,\eta) = \exp\left(-\int_{\xi}^{x} b(\theta,\eta)\,d\theta\right),$$

$$R^*(\xi,y;\xi,\eta) = \exp\left(-\int_{\eta}^{y} a(\xi,\theta)\,d\theta\right). \ ■$$

Теорема 4.14. Пусть функции a, b, c, a_x, b_y непрерывны в $\overline{\Pi}_0$. Тогда функция Римана существует, она единственна и удовлетворяет равенству

$$R(x,\ y;\ \xi,\ \eta) = R^*(\xi,\ \eta;\ x,\ y). \tag{4.106}$$

Доказательство. Идея доказательства состоит в следующем. Пусть в прямоугольнике Π_0 фиксирована внутренняя точка $M(\xi,\ \eta)$. Характеристики уравнения (4.104) $x = \xi$ и $y = \eta$ разбивают Π_0 на четыре прямоугольника Π_i, $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$, с общей вершиной M (если точку M выбрать на границе прямоугольника Π_0, то получим только два таких прямоугольника или только один из них). В каждом построенном прямоугольнике решим задачу Гурса (4.104), (4.105) с данными на лежащих в Π_0 отрезках характеристик, которые выходят из точки M. Эти решения существуют и они единственны. Затем проверим, что во всем прямоугольнике $\overline{\Pi}_0$ построенная функция $R(x,\ y;\ \xi,\ \eta)$ полностью удовлетворяет определению функции Римана. При этом существенна устойчивость решений четырех задач Гурса вместе с их производными первого порядка и со смешанной производной.

Равенство (4.106) следует из формулы Грина (4.96), примененной к функциям $u = R^*(x,\ y;\ \xi^*,\ \eta^*)$ и $v = R(x,\ y;\ \xi,\ \eta)$ в прямоугольнике со сторонами, параллельными осям, и с вершинами $(\xi^*,\ \eta^*)$ и $(\xi,\ \eta)$ на его диагонали.ъ

Существование функции Римана позволяет обосновать формулу (4.101) и доказать корректность задачи Коши (4.88), (4.90).

Теорема 4.15. Пусть кривая γ задана уравнением $y = \mu(x)$, $\mu \in C^2[0,\ x_0]$, $\mu'(x) < 0$. Пусть a, b, c, a_x, b_y принадлежат $C\left(\overline{\Pi}_0\right)$, $f \in C\left(\overline{T}_0'\right)$, $\Psi_0\left(x,\mu(x)\right) \in C^2\left[0,x_0\right]$, $\Psi_1\left(x,\mu(x)\right) \in C^1\left[0,x_0\right]$. Тогда формула (4.101) определяет решение задачи (4.88), (4.90). Это решение единственно и устойчиво по отношению к возмущениям функций f, Ψ_0, Ψ_1.

4.8.6. Смысл формулы Римана: множество зависимости решения задачи Коши от начальных данных

Формула (4.101) показывает, что решение задачи Коши (4.88), (4.90) в точке M полностью определяется значениями функции

f в криволинейном треугольнике $\bar{T}$ и начальными данными Ψ_0, Ψ_1 на дуге кривой γ_{BC}. Если изменить f вне $\bar{T}$, а Ψ_0 и/или Ψ_1 — вне γ_{BC}, то решение может измениться лишь вне $\bar{T}$. Поэтому к решению, фиксированному в $\bar{T}$, можно присоединить вдоль характеристик BM и CM *различные решения*, являющиеся его продолжением (с соблюдением свойств гладкости).

4.8.7. Нелинейные задачи Коши и Гурса

В общем случае уравнение гиперболического типа в первой канонической форме нелинейно. Для такого уравнения также можно поставить задачу Гурса:

$$\begin{cases} u_{xy} = G\left(x, y, u, u_x, u_y\right) \text{ в } \Pi_0; \\ u(x,0) = \varphi_1(x), 0 \le x \le x_0; \\ u(0,y) = \varphi_2(y), 0 \le y \le y_0; \varphi_1(0) = \varphi_2(0). \end{cases} \tag{4.107}$$

Она эквивалентна системе уравнений

$$\begin{cases} u(x,y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \\ + \int\limits_0^x d\theta_1 \int\limits_0^y G\left(\theta_1, \theta_2, u(\theta_1,\theta_2), v(\theta_1,\theta_2), w(\theta_1,\theta_2)\right) d\theta_2, \\ v(x,y) = \varphi_1'(x) + \int\limits_0^y G\left(x, \theta, u(x,\theta), v(x,\theta), w(x,\theta)\right) d\theta, \\ w(x,y) = \varphi_2'(y) + \int\limits_0^x G\left(\theta, y, u(\theta,y), v(\theta,y), w(\theta,y)\right) d\theta. \end{cases} \tag{4.108}$$

Для нелинейного уравнения можно поставить задачу Коши:

$$\begin{cases} u_{xy} = G\left(x, y, u, u_x, u_y\right) \text{ в } T_0'; \\ u\big|_\gamma = \Psi_0, \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\gamma = \Psi_1. \end{cases} \tag{4.109}$$

Пусть кривая γ в (4.109) задана уравнением $y = \mu(x)$, а функция μ имеет всюду конечную производную $\mu'(x) < 0$. Выполним в (4.109) замену искомой функции: $u(x,y) = U(x,y) + \Psi_0\left(x, \mu(x)\right) + + \left(y - \mu(x)\right) u_y\left(x, \mu(x)\right)$. Тогда $U(x, \mu(x)) = 0$, $U_y(x, \mu(x)) = 0$, и из равенства $U_x\left(x, \mu(x)\right) + U_y\left(x, \mu(x)\right)\mu'(x) = 0$ получаем $U_x(x, \mu(x)) = 0$. Тем самым задача (4.109) приводится к виду

$$\begin{cases} U_{xy} = F\left(x, y, U, U_x, U_y\right) \text{ в } T_0'; \\ U\big|_\gamma = 0, \, U_x\Big|_\gamma = 0, \; U_y\Big|_\gamma = 0, \end{cases} \tag{4.110}$$

где функция F очевидным образом выражается через G, через Ψ_0, Ψ_1, μ и их производные. Задача (4.110) эквивалентна системе уравнений

$$\begin{cases} U(x,y) = \iint\limits_{T(x,y)} F\big(\theta_1, \theta_2, U(\theta_1, \theta_2), v(\theta_1, \theta_2), w(\theta_1, \theta_2)\big) d\theta_1 d\theta_2; \\ v(x,y) = \int\limits_{\mu(x)}^{y} F\big(x, \theta, U(x, \theta), v(x, \theta), w(x, \theta)\big) d\theta; \\ w(x,y) = \int\limits_{\mu^{-1}(y)}^{x} F\big(\theta, y, U(\theta, y), v(\theta, y), w(\theta, y)\big) d\theta, \end{cases} \tag{4.111}$$

где криволинейный треугольник $T(x, y)$ имеет вершину $M(x, y)$ и ограничен параллельными осям прямыми, проходящими через M, и дугой кривой γ.

Для обоснования корректности задач (4.107) и (4.109) можно пытаться решить методом последовательных приближений системы уравнений (4.108) и (4.111). Однако для этого требуются специальные предположения о функции G.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите задачу Коши для однородного волнового уравнения в области $-\infty < x < +\infty$ с начальными условиями $u(x,0) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|x|}{l}, \; |x| \le l; \\ 0, \; |x| > l, \end{cases}$ $u_t(x, 0) = 0$.

Постройте графики зависимости u от x для фиксированных значений $t = t_i = \dfrac{li}{4a}$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Указание. Сначала представьте $u(x, 0)$ в виде суммы двух одинаковых треугольных волн высотой $\dfrac{1}{2}$. Затем в каждый момент времени складывайте профили двух разбегающихся указанных треугольных волн.

Можно ли полученное решение считать классическим решением задачи Коши для волнового уравнения? Приведите пример последова-

тельности достаточно гладких функций, равномерно приближающих данное негладкое начальное условие.

Постройте график функции $u\left(\frac{l}{2}, t\right)$.

2. Решите задачу Коши для однородного волнового уравнения в области $-\infty < x < +\infty$ с начальными условиями $u(x, 0) = 0$,

$$u_t(x,0) = \begin{cases} V = \text{const} \neq 0, & |x| \leq l; \\ 0, & |x| > l. \end{cases}$$

Постройте графики зависимости u от x для фиксированных значений $t = t_i = \frac{li}{4a}$, $i = 0, 2, 4, 6$.

Указание. Сначала постройте график функции $\Psi(z) = \frac{1}{2a} \int\limits_{-\infty}^{z} \psi(\xi) d\xi$, где $\psi(\xi) = V$ при $-l \leq x \leq l$ и $\psi(\xi) = 0$ вне этого отрезка. Во что превращается формула Даламбера в рассматриваемом случае? Складывайте в каждый момент времени профили разбегающихся волн $\Psi(x + at)$ и $-\Psi(x - at)$.

Можно ли полученное решение считать классическим решением задачи Коши для волнового уравнения? Приведите пример последовательности достаточно гладких функций, приближающих данное разрывное начальное условие. Может ли такое приближение быть равномерным?

Постройте график функции $u\left(\frac{l}{2}, t\right)$.

3. Свободные поперечные колебания струны $0 \leq x < +\infty$ с жестко закрепленным концом $x = 0$ вызваны начальным отклонением $u(x, 0) = \sin(kx)$, $0 \leq x < +\infty$, $k = \text{const} > 0$, и начальной скоростью $u_t(x, 0) = -ka\cos(kx)$, $0 \leq x < +\infty$, где $a = \text{const} > 0$ — скорость распространения волн вдоль оси Ox. Нарисуйте графики $u\left(\frac{2\pi}{k}, t\right)$ и $u\left(x, \frac{3\pi}{ka}\right)$. Можно ли решение $u(x, t)$ считать классическим?

4. Решите задачу Коши для волнового уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ в области $0 < x < +\infty$, $t > 0$, с начальными условиями

$$u(x,0) = \begin{cases} \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, x \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad u_t(x, 0) = 0, \ 0 \leq x < +\infty,$$

$u_x(0, t) = 0$, $t > 0$.

Постройте графики $u\left(\frac{\pi}{4}, t\right)$ и $u\left(x, \frac{\pi}{4a}\right)$. Можно ли решение $u(x, t)$ считать классическим?

5. По струне $0 \leq x < +\infty$ распространяется волна $g(x + at)$, где $g(p)$ — заданная функция; $g(p) = 0$ при $p \leq 0$. Передний фронт волны

находится в точке $x = 0$ в момент времени $t = 0$. Найдите отраженную от конца струны волну, если:

а) конец струны жестко закреплен; б) конец струны свободен.

6. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < +\infty$, $t > 0$,

$u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, $0 \le x < +\infty$.

Как необходимо согласовать начальные и краевое условия в начально-краевой задаче: а) с краевым условием $u(0, t) = 0$, $t \ge 0$; б) с краевым условием $u_x(0, t) = 0$, $t \ge 0$, чтобы существовало ее классическое решение?

7. Начальные данные φ и ψ в задаче Коши о свободных колебаниях в пространстве $Oxyz$ локализованы в шаре $\Omega = \{P \in Oxyz \mid R_{OP} < l\}$. Найдите множество зависимости решения от значений φ и ψ на Ω.

8. Начальные данные φ и ψ в задаче Коши о свободных колебаниях на плоскости Oxy локализованы в круге $\Omega = \{P \in Oxy \mid R_{OP} < l\}$. Найдите множество зависимости решения от значений φ и ψ на Ω.

9. Докажите, что уравнение $u_{tt} = a^2 \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$ относительно функции $u = u(x_1, \ldots, x_n, t)$ имеет частное решение $u = v(p)$, $p = \dfrac{at}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}}$, которое при $\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \neq 0$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $(p^2 - 1)v''(p) + (3 - n)pv'(p) = 0$.

10. Пусть функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ при $0 < x < l$, $t > 0$ и краевым условиям $u(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$ при $t > 0$. Достаточно ли этих условий для выделения единственного решения уравнения?

Указание. Рассмотрите однопараметрические семейства функций

$$\left\{u_n(x,t) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\sin\left(\frac{\pi n a}{l}t\right), n = 0,1,2,\ldots,\right\},$$

$$\left\{u_n(x,t) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)\cos\left(\frac{\pi n a}{l}t\right), n = 0,1,2,\ldots,\right\}.$$

Если к этому уравнению и указанным краевым условиям добавить начальное условие $u(x, 0) = \varphi(x)$ при $0 \le x \le l$, то позволит ли оно выделить единственное решение?

Указание. Рассмотрите начальное условие $u(x,0) = \varphi(x) = \sin\dfrac{\pi}{l}x$.

11. Разделяя переменные, постройте задачу Штурма—Лиувилля, отвечающую следующей начально-краевой задаче:

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$;

$u(0, t) = 0$, $u_x(\pi, t) = 0$, $t > 0$;

$u(x,0) = \sin\dfrac{3x}{2} + \sin\dfrac{5x}{2}$, $0 \le x \le \pi$;

$$u_t(x,0) = a\sin\frac{7x}{2},\ 0 \le x \le \pi.$$

Проверьте ортогональность системы собственных функций и найдите евклидову норму каждой из них. Найдите решение $u(x,\ t)$ в виде ряда Фурье по собственным функциям.

12. Сформулируйте определение классического решения следующей задачи:

$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < l,\ t > 0;$
$u_x(0,\ t) = 0,\ u_x(l,\ t) = 0,\ t > 0;$
$u(x,\ 0) = \varphi(x),\ u_t(x,\ 0) = \psi(x),\ 0 \le x \le l.$

Каким требованиям должны удовлетворять функции φ и ψ?

Разделяя переменные, постройте задачу Штурма—Лиувилля. Проверьте ортогональность системы собственных функций и найдите евклидову норму каждой из них.

Постройте $u(x,\ t)$ в виде ряда по собственным функциям. Как найти его коэффициенты? Какое движение колеблющейся струны отвечает собственному значению $\lambda_0 = 0$?

13. Сформулируйте определение классического решения следующей задачи:

$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,\ t),\ 0 < x < l,\ t > 0;$
$u(0,\ t) = \mu(t),\ u_x(l,\ t) + hu(l,\ t) = \chi(t),\ t > 0;$
$u(x,\ 0) = \varphi(x),\ u_t(x,\ 0) = \psi(x),\ 0 \le x \le l.$

Каким требованиям должны удовлетворять функции f, φ, ψ, μ, χ и постоянная h?

Подберите какую-либо функцию $U(x,\ t)$, удовлетворяющую заданным неоднородным краевым условиям, и выполните замену искомой функции $u(x,\ t) = v(x,\ t) + U(x,\ t)$.

Разделяя переменные, постройте задачу Штурма—Лиувилля, отвечающую полученной для $v(x,\ t)$ начально-краевой задаче. Проверьте ортогональность системы собственных функций и найдите евклидову норму каждой из них.

Каков общий вид функционального ряда, дающего формальное решение $v(x,\ t)$? Как найти его коэффициенты?

14. Дайте физическую интерпретацию краевых условий первого, второго, третьего рода на концах $x = 0$ и $x = l$ упругого стержня $0 \le x \le l$, совершающего продольные колебания.

15. Одномерный однородный упругий стержень $0 \le x \le l$ находится в состоянии покоя в моменты времени $t \le 0$. В моменты времени $t \ge 0$ к его концам приложены противоположно направленные растягивающие продольные (вдоль оси Ox) силы. Величина каждой силы $f = \text{const}$. В моменты времени $t > 0$ найдите продольное смещение $u(x,\ t)$ точки, имевшей в состоянии покоя координату x.

16. Края однородной прямоугольной мембраны

$$D = \{0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$$

жестко закреплены. До момента времени $t = 0$ мембрана находилась в состоянии покоя, а в момент $t = 0$ ей передан равномерно распределенный по D поперечный импульс. Решите задачу о свободных поперечных колебаниях мембраны.

17. Дайте физическую интерпретацию следующей задачи:

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$;

$u(0, t) = 0$, $u_x(l, t) = v\sin(\omega t)$, $v = \text{const}$, $t > 0$;

$u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$, $0 \le x \le l$.

Считая постоянную ω параметром задачи, найдите $u(x, t)$. Рассмотрите случаи наличия и отсутствия резонанса.

18. В модели поперечных колебаний струны

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $0 < t < +\infty$,

$u_x(0, t) = 0$, $u(l, t) = 0$, $0 < t < +\infty$,

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{n=0}^{N} \varphi_n \cos\left(\frac{\pi}{2l}(2n+1)x\right), \qquad N < +\infty,$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{n=0}^{N} \psi_n \cos\left(\frac{\pi}{2l}(2n+1)x\right), \qquad 0 \le x \le l,$$

найдите энергию $\mathscr{E}_n(t)$, приходящуюся на колебание с собственной частотой ω_n. Найдите полную энергию $\mathscr{E}(t)$ струны в момент времени t. Докажите, что $\mathscr{E}(t) = \sum_{n=0}^{N} \mathscr{E}_n(t)$.

19. Проверьте, что условия излучения Зоммерфельда гарантируют единственность решения $v(r)$ задачи

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 \text{ вне шара } 0 \le r \le a, \\ v(a) = v_0 = \text{const}. \end{cases}$$

Найдите удовлетворяющую этим условиям комплекснозначную амплитуду $v(r)$ установившихся вне шара колебаний $u(r, t)$, если:

а) $u(r, t) = v(r)e^{i\omega t}$;

б) $u(r, t) = v(r)e^{-i\omega t}$.

20. Кривая γ на плоскости Oxy задана уравнением $y = x^3$, $\mathbf{n}$ — нормаль к γ. Функции Ψ_0 и Ψ_1 заданы выражениями $\Psi_0(x, y) = 2x + y + 3$, $\Psi_1(x, y) = x + y + 5$. Существует ли на всей плоскости Oxy решение уравнения $u_{xy} + e^{xy}u_x + \cos(xy)u_y + ch(xy)u = x^2 + y^2$, которое на кривой γ удовлетворяет условиям $u|_\gamma = \Psi_0(x, x^3)$, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\gamma = \Psi_1(x, x^3)$?

21. Заменой независимых переменных приведите уравнение к первой канонической форме и запишите задачу в новых переменных:

$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$, $-\infty < x < +\infty$, $0 < t < +\infty$,

$u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_t(x, 0) = \psi(x)$, $-\infty < x < +\infty$.

Найдите функцию Римана. Постройте решение по формуле Римана. Запишите ответ в исходных переменных x, t.

22. Найдите решение уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, удовлетворяющее условиям $u\left(x, \frac{x}{a}\right) = \varphi_1(x)$, $0 \le x \le x_1$; $u\left(x, -\frac{x}{a}\right) = \varphi_2(x)$, $0 \le x \le x_2$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in C^2$, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

23. Дано уравнение $u_{xx} - u_{tt} + \alpha u_x + \beta u_t - \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4} u = 0$, $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$. Для данного уравнения решите задачу Коши $u(0, t) = \Psi_0(t)$, $u_x(0, t) = \Psi_1(t)$. Для этого же уравнения решите задачу Гурса $u(x, x) = \varphi_1(x)$, $u(x, -x) = \varphi_2(x)$, $x \ge 0$; $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$.

ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО КУРСУ

1. На плоскости Oxy найдите области, в которых уравнение $u_{xx}(x, y) + xyu_{yy}(x, y) = 0$ сохраняет тип, и приведите его к канонической форме в каждой из этих областей.

2. Найдите решение $u(x, t)$ следующей задачи:

$$u_t = u_{xx} + u - x + 2\sin 2x \cos x, 0 < x < \frac{\pi}{2}, t > 0;$$

$$u(0,t) = 0, u_x\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 1, t > 0;$$

$$u(x,0) = x, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

Имеет ли физическую интерпретацию это уравнение параболического типа?

3. Зная, что функция $U(x, \tau) = e^{-\tau}\sin x$ удовлетворяет уравнению $U_\tau = U_{xx}$, методом подбора найдите единственное решение $u(x, t)$ задачи

$$4u_t = u_{xx}, -\infty < x < +\infty, t > 0;$$

$$u(x,0) = e^{-x^2}\sin x, -\infty < x < +\infty.$$

4. Однородный полуограниченный стержень $0 \le x < +\infty$ без источников теплоты имеет начальную температуру

$$u(x,0) = \begin{cases} u_0 = \text{const}, 0 \le x \le l, \\ 0, l < x < +\infty. \end{cases}$$

Его боковая поверхность теплоизолирована, а конец $x = 0$ при $t > 0$ поддерживается при температуре $u(0, t) = 0$. Найдите температуру стержня $u(x, t)$ во все моменты времени t и $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$.

Нарисуйте график изменения температуры в точке $x = \frac{l}{2}$. Найдите поток теплоты через конец $x = 0$ при $t > 0$.

5. Начальная температура однородного шара радиуса r_0 равна $\frac{u_0}{r}\sin\frac{3\pi r}{r_0}$ при $0 < r \le r_0$ (r — расстояние от точки до центра

шара; $u_0 = \text{const}$) и является непрерывной функцией на $0 \le r \le$ $\le r_0$. Во все моменты времени $t > 0$ поверхность шара поддерживается при нулевой температуре. Найдите температуру внутри шара при $t > 0$.

6. Найдите ограниченную функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующей задаче:

$$\Delta u(x, y) = 0,\ 0 < x < +\infty,\ 0 < y < +\infty;$$

$$u(x,0) = \frac{\pi}{2},\ 0 < x < +\infty;\ u(0,y) = -\frac{\pi}{2},\ 0 < y < +\infty.$$

7. Найдите ограниченную функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующей задаче:

$$\Delta u(x, y) = \sin 6x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < +\infty;$$

$$u(0, y) = 0,\ 0 \le y < +\infty;\ u\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0,\ 0 \le y < +\infty;$$

$$u(x, 0) = \sin 8x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}.$$

8. Найдите функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующей задаче:

$$\Delta u(x,y) = \cos\left(\frac{\pi x}{a} - \frac{\pi y}{b}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{a} + \frac{\pi y}{b}\right),\ |x| < a,\ |y| < b;$$

$$u(-a, y) = \cos\frac{\pi y}{2b},\ u(a, y) = \sin\frac{2\pi y}{b};$$

$$u(x, -b) = -\sin\frac{\pi x}{a},\ u(x, b) = -\cos\frac{3\pi x}{2a}.$$

9. Решите задачу Дирихле для уравнения Лапласа вне круга $0 \le r \le 1$ с краевым условием $u(r = 1, \varphi) = \sin^2(2\varphi)$ (r, φ — полярные координаты).

10. Найдите функцию $u(r, \varphi)$ (r, φ — полярные координаты), удовлетворяющую следующей задаче:

$$\Delta u(r, \varphi) = 0,\ 0 < r < 3,\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{6};$$

$$u(r, 0) = 0,\ u\left(r, \frac{\pi}{6}\right) = 0, 0 \le r \le 3;$$

$$u(3, \varphi) = \sin(18\varphi),\ 0 < \varphi < \frac{\pi}{6}.$$

11. Найдите функцию $u(r, \varphi)$ (r, φ — полярные координаты), удовлетворяющую следующей задаче:

$$\Delta u(r, \varphi) = 0,\ 0 \leq r < a,\ 0 \leq \varphi < 2\pi;$$

$$\frac{\partial u(a,\varphi)}{\partial r} = \begin{cases} 1, 0 < \varphi < \pi, \\ -1, \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

12. В шаре $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ распределена масса с объемной плотностью $\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)\cdot\text{const}$. Какому уравнению удовлетворяет объемный потенциал внутри шара; вне шара? Найдите этот объемный потенциал.

13. Решите задачу Коши для однородного волнового уравнения в области $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$ с начальными условиями

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \begin{cases} v_0 \cos x,\ -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2},\ v_0 = \text{const}, \\ 0,\ |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Скорость распространения волн вдоль оси Ox равна a. Найдите зависимость u от времени t при каждом фиксированном $x = x_0$.

Можно ли считать решение $u(x, t)$ этой задачи классическим?

14. Конец $x = 0$ однородной струны $0 \leq x < +\infty$ жестко закреплен. Начальное отклонение $\varphi(x) \equiv 0$, начальная поперечная скорость $\psi(x) = \dfrac{cx}{1+x^2}$, $c = \text{const}$. Решите задачу о свободных поперечных колебаниях струны. Постройте график движения точки $x = 1$.

15. По струне $-\infty < x \leq 0$ распространяется волна $g(x - at)$, где $g(p)$ — заданная функция; $g(p) = 0$ при $p \geq 0$. Передний фронт волны находится в точке $x = 0$ в момент времени $t = 0$. Конец струны $x = 0$ упруго закреплен, внешние силы на него не действуют. Найдите отраженную от конца волну.

16. Разделяя переменные, постройте задачу Штурма—Лиувилля, отвечающую данной начально-краевой задаче.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0;$$

$$u_x(0, t) = 0,\ u(\pi, t) = 0,\ t > 0;$$

$$u(x,0) = \cos\frac{3x}{2} + \cos\frac{7x}{2}, 0 \leq x \leq \pi; u_t(x,0) = a\cos\frac{x}{2}, 0 \leq x \leq \pi.$$

Проверьте ортогональность системы собственных функций и найдите евклидову норму каждой из них. Найдите решение $u(x, t)$ в виде ряда Фурье по собственным функциям.

17. $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $0 < x < l$, $t > 0$,

$$u_x(0, t) - hu(0, t) = 0,\ h = \text{const} > 0,\ t > 0;\ u(l, t) = 0,\ t > 0;$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),\ u_t(x, 0) = \psi(x),\ 0 \le x \le l.$$

Найдите $u(x, t)$ методом разделения переменных.

18. Края однородной прямоугольной мембраны $D = \{0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$ жестко закреплены. В момент времени $t = 0$ мембрана имеет поперечный изгиб $u(x, y, 0) = u_0 xy(l_1 - x)(l_2 - y)$, $u_0 = \text{const}$, а ее поперечная скорость при $t = 0$ всюду в D равна нулю.

Решите задачу о свободных поперечных колебаниях мембраны.

19. Дайте физическую интерпретацию следующей задачи:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0 \sin(\omega t),\ f_0 = \text{const},\ 0 < x < l,\ t > 0,$$

$$u(0, t) = 0,\ u(l, t) = 0,\ t \ge 0,$$

$$u(x, 0) = 0,\ u_t(x, 0) = 0,\ 0 \le x \le l.$$

Считая постоянную ω параметром задачи, найдите $u(x, t)$. Рассмотрите случаи наличия и отсутствия резонанса.

20. Решите задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta v(x, y) + cv(x, y) = 0,\ 0 < x < l_1,\ 0 < y < l_2,$$

$$v(0, y) = \frac{v_0}{l_2^2}\left(y^2 - l_2 y\right),\ v(l_1, y) = 0,\ 0 \le y \le l_2,$$

$$v(x, 0) = 0,\ v(x, l_2) = 0,\ 0 \le x \le l_1;\ v_0 = \text{const} \ne 0.$$

Рассмотрите случаи всех возможных значений действительного коэффициента c.

ОТВЕТЫ

Глава 1

2. $U(x,t)=V(x-ct)=Ae^{-c(x-ct)}+B$, где A и B — произвольные постоянные.

5. $F(x,t)=-\dfrac{2W}{l}\left[\dfrac{\text{Дж}}{\text{с}\cdot\text{см}^3}\right]=\text{const}.$

6. Стационарная температура удовлетворяет уравнению $u_t = a^2\Delta_{r,\varphi}u - a^2u_0\sin\varphi = 0$, т. е. $\Delta_{r,\varphi}u = u_0\sin\varphi = -\dfrac{F}{k}$. Отсюда $F(r, \varphi, t) = -ku_0\sin\varphi$ во все моменты времени t.

9. В переменных Эйлера.

12. В области $\begin{cases}x<0,\\ y>0\end{cases}$ уравнение гиперболического типа, имеет два семейства действительных характеристик: $(-x)^{3/2}+y^{3/2}=\text{const}$ и $(-x)^{3/2}-y^{3/2}=\text{const}$. Заменой переменных $\begin{cases}\xi=(-x)^{3/2}+y^{3/2},\\ \eta=(-x)^{3/2}-y^{3/2}\end{cases}$ уравнение приводится к первой канонической форме $u_{\xi\eta}=\dfrac{2}{3\left(\xi^2-\eta^2\right)}\left(\eta u_\xi-\xi u_\eta\right)$, а заменой переменных $\begin{cases}\tilde\xi=(-x)^{3/2},\\ \tilde\eta=y^{3/2}\end{cases}$ оно приводится ко второй канонической форме: $u_{\tilde\xi\tilde\xi}-u_{\tilde\eta\tilde\eta}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{u_{\tilde\eta}}{\tilde\eta}-\dfrac{u_{\tilde\xi}}{\tilde\xi}\right)$.

В области $\begin{cases}x>0,\\ y<0\end{cases}$ уравнение гиперболического типа, имеет два семейства действительных характеристик: $x^{3/2}+(-y)^{3/2}=\text{const}$ и $x^{3/2}-(-y)^{3/2}=\text{const}$. Заменой переменных $\begin{cases}\xi=x^{3/2}+(-y)^{3/2},\\ \eta=x^{3/2}-(-y)^{3/2}\end{cases}$ уравнение приводится к той же первой канонической форме, а заменой переменных $\begin{cases}\tilde\xi=x^{3/2},\\ \tilde\eta=(-y)^{3/2}\end{cases}$ оно приводится к той же второй канонической форме.

В области $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0 \end{cases}$ уравнение эллиптического типа, действительных характеристик не имеет. Заменой переменных $\begin{cases} \tilde{\xi} = x^{3/2}, \\ \tilde{\eta} = y^{3/2} \end{cases}$ уравнение приводится к канонической форме: $u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} + u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} = -\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{u_{\tilde{\eta}}}{\tilde{\eta}} + \dfrac{u_{\tilde{\xi}}}{\tilde{\xi}}\right)$.

В области $\begin{cases} x < 0, \\ y < 0 \end{cases}$ уравнение эллиптического типа. Заменой переменных $\begin{cases} \tilde{\xi} = (-x)^{3/2}, \\ \tilde{\eta} = (-y)^{3/2} \end{cases}$ оно приводится к той же канонической форме.

13. В области $\begin{cases} x < 0, \\ y > 0 \end{cases}$ уравнение гиперболического типа, имеет два семейства действительных характеристик: $\sqrt{-x} + \sqrt{y} = \text{const}$ и $\sqrt{-x} - \sqrt{y} = \text{const}$. Заменой переменных $\begin{cases} \xi = \sqrt{-x} + \sqrt{y}, \\ \eta = \sqrt{-x} - \sqrt{y} \end{cases}$ уравнение приводится к первой канонической форме: $u_{\xi\eta} = \dfrac{1}{\xi^2 - \eta^2}\left(\xi u_\eta - \eta u_\xi\right)$, а заменой переменных $\begin{cases} \tilde{\xi} = \sqrt{-x} \\ \tilde{\eta} = \sqrt{y} \end{cases}$ оно приводится ко второй канонической форме: $u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} - u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} = \dfrac{u_{\tilde{\xi}}}{\tilde{\xi}} - \dfrac{u_{\tilde{\eta}}}{\tilde{\eta}}$.

В области $\begin{cases} x > 0, \\ y < 0 \end{cases}$ уравнение гиперболического типа, имеет два семейства действительных характеристик: $\sqrt{x} + \sqrt{-y} = \text{const}$ и $\sqrt{x} - \sqrt{-y} = \text{const}$. Заменой переменных $\begin{cases} \xi = \sqrt{x} + \sqrt{-y}, \\ \eta = \sqrt{x} - \sqrt{-y} \end{cases}$ уравнение приводится к той же первой канонической форме, а заменой переменных $\begin{cases} \tilde{\xi} = \sqrt{x}, \\ \tilde{\eta} = \sqrt{-y} \end{cases}$ оно приводится к той же второй канонической форме.

В области $\begin{cases} x > 0, \\ y > 0 \end{cases}$ уравнение эллиптического типа, действительных характеристик не имеет. Заменой переменных $\begin{cases} \tilde{\xi} = \sqrt{x}, \\ \tilde{\eta} = \sqrt{y} \end{cases}$ уравнение приводится к канонической форме: $u_{\tilde{\xi}\tilde{\xi}} + u_{\tilde{\eta}\tilde{\eta}} = \dfrac{u_{\tilde{\xi}}}{\tilde{\xi}} + \dfrac{u_{\tilde{\eta}}}{\tilde{\eta}}$.

В области $\begin{cases} x < 0, \\ y < 0 \end{cases}$ уравнение эллиптического типа заменой перемен-

ных $\begin{cases} \tilde{\xi} = \sqrt{-x}, \\ \tilde{\eta} = \sqrt{-y} \end{cases}$ приводится к той же канонической форме.

20. Уравнение с постоянными коэффициентами всюду на плоскости Oxy параболического типа, имеет одно семейство действительных характеристик: $x - y = \text{const}$. Заменой переменных $\begin{cases} \xi = x - y, \\ \eta = x + y \end{cases}$ уравнение

приводится к канонической форме: $u_{\eta\eta} + \dfrac{1}{2}u_\eta + \dfrac{1}{4}u = 0$, являющейся обыкновенным дифференциальным уравнением.

21. Уравнение с постоянными коэффициентами всюду на плоскости Oxy параболического типа, имеет одно семейство действительных характеристик: $x + y = \text{const}$. Заменой переменных $\begin{cases} \xi = x + y, \\ \eta = x - y \end{cases}$ уравнение

приводится к канонической форме: $u_{\xi\xi} + u_\xi + 2u_\eta + \dfrac{1}{4}u = 0$. Заменой искомой функции $u = e^{-\xi/2}v$ получаем $v_{\xi\xi} + 2v_\eta = 0$.

22. Коэффициенты при старших производных в уравнении постоянны, поэтому в каждой точке $(x,\ y,\ z)$ оно имеет один и тот же тип. Уравнению отвечает квадратичная форма

$$Q = q_1^2 + 2q_1q_2 - 2q_1q_3 + 2q_2^2 + 6q_3^2,$$

которую можно привести к каноническому виду, например, последовательным выделением полных квадратов: $Q = (q_1 + q_2 - q_3)^2 + (q_2 + q_3)^2 + + (2q_3)^2$. В переменных $p_1 = q_1 + q_2 - q_3$, $p_2 = q_2 + q_3$, $p_3 = 2q_3$ квадратичная форма $Q = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$ имеет все положительные коэффициенты, поэтому дифференциальное уравнение — эллиптического типа.

26. $u(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2}$.

27. Действительных характеристик система не имеет.

28. $W_{\xi\eta} + \dfrac{(CR - GL)^2}{16CL}W = 0$.

Глава 2

4. Слева от S лед, справа — вода. Если $\dfrac{dS}{dt} > 0$, то идет процесс затвердевания воды, если $\dfrac{dS}{dt} < 0$, то — процесс плавления льда.

9. $$u = u_0 e^{-\frac{9a^2}{4}t} \cos\frac{3x}{2}; \lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0.$$

$$W(\pi,t) = -ku_x(\pi,t) = -\frac{3ku_0}{2} e^{-\frac{9a^2}{4}t},$$

где k — коэффициент теплопроводности.

12. $$u(x,t) = u_0 - \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2l}(2n+1)x\right)}{2n+1} e^{-\left(\frac{\pi}{2l}(2n+1)a\right)^2 t},$$

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = u_0.$$

14. $$u(x,t) = \frac{W}{k}\left(\frac{l}{2} - x\right) - \frac{4lW}{\pi^2 k}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{l}(2m+1)x\right)}{(2m+1)^2} e^{-\left(\frac{\pi}{l}(2m+1)a\right)^2 t},$$

$$u\left(\frac{l}{2},t\right) \equiv 0, \quad \lim_{t\to+\infty} u(x,t) = \frac{W}{k}\left(\frac{l}{2} - x\right).$$

16. $$u(x,t) = u_{\text{среды}} + \frac{4e^{-bt}}{\pi}(u_0 - u_{\text{среды}})\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2l}(2n+1)x\right)}{2n+1} e^{-\left(\frac{\pi}{2l}(2n+1)a\right)^2 t},$$

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = u_{\text{среды}}.$$

18. Начальная температура и плотность распределения источников теплоты не зависят от x. Поэтому $u(x,\ t) = V(t)$, поскольку с течением времени теплота не будет передаваться от одного участка стержня к другому и не будет теряться через концы стержня. $u(x,\ t) = V(t) = f_0 t$. $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = +\infty$.

21. $$u(r,t) = \frac{2u_0 r_0}{\pi r}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(\frac{\pi n r}{r_0}\right) \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{r_0}\right)^2 t\right\}.$$

22. $u = \frac{u_0}{2}\left[erf\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right) - erf\left(\frac{x-l}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$, $\lim\limits_{t\to 0+} u(\pm l,t) = \frac{u_0}{2}$.

23. $u = u_0\left[1 - erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$, $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = u_0$. Плотность потока теплоты через конец стержня равна $\frac{ku_0}{a\sqrt{\pi t}}$, $a = \sqrt{\frac{k}{c\rho}}$.

24. $u = u_0\left[1 - e^{-ht} erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$.

27. $u(x,t) = u_0 \cos x e^{-a^2 t}$, $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$.

1. u_1 и u_4 — гармонические функции; u_2 и u_3 не являются гармоническими.

2. u_1, u_2, u_3, u_4 — гармонические функции; u_5, u_6, u_7, u_8 не являются гармоническими.

3. $u = \dfrac{1}{r}$ является потенциалом электростатического поля в вакууме, создаваемого единичным точечным зарядом, помещенным в начало координат.

4. $u = 2\mathrm{e}\ln\dfrac{1}{r}$.

5. Не выполнено необходимое условие разрешимости внутренней задачи Неймана.

7. $u = \dfrac{\sin\dfrac{\pi x}{a}\,\mathrm{sh}\dfrac{\pi(b-y)}{a}}{\mathrm{sh}\dfrac{\pi b}{a}} + \dfrac{\sin\dfrac{2\pi x}{a}\,\mathrm{sh}\dfrac{2\pi y}{a}}{\mathrm{sh}\dfrac{2\pi b}{a}}$.

9. $u = \dfrac{\sin(3x)\,\mathrm{ch}(3y)}{3\mathrm{sh}(3\pi)} + \dfrac{\mathrm{sh}(2x)\cos(2y)}{\mathrm{sh}(2\pi)} - \dfrac{\sin(2x)\,\mathrm{ch}\big(2(\pi-y)\big)}{2\mathrm{sh}(2\pi)}$.

10. $u = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + U$, где $v_1 = \dfrac{\sin\dfrac{\pi x}{a}\,\mathrm{sh}\dfrac{\pi(b-y)}{a}}{\mathrm{sh}\dfrac{\pi b}{a}}$,

$$v_2 = \frac{\sin\dfrac{2\pi y}{b}\,\mathrm{sh}\dfrac{2\pi x}{b}}{\mathrm{sh}\dfrac{2\pi a}{b}},\quad v_3 = \frac{\sin\dfrac{3\pi x}{a}\,\mathrm{sh}\dfrac{3\pi y}{a}}{\mathrm{sh}\dfrac{3\pi b}{a}},$$

$$v_4 = \frac{\sin\dfrac{4\pi y}{b}\,\mathrm{sh}\dfrac{4\pi(a-x)}{b}}{\mathrm{sh}\dfrac{4\pi a}{b}},\quad U = -\frac{\sin\dfrac{5\pi x}{a}\sin\dfrac{6\pi y}{b}}{\dfrac{25\pi^2}{a^2}+\dfrac{36\pi^2}{b^2}}.$$

11. $u = \dfrac{1}{4}\big(\mathrm{e}^{-2y}-1\big)\sin(2x) + \mathrm{e}^{-4y}\sin(4x)$.

12. $r^3\sin 3\varphi; \dfrac{1}{2}\big(1-r^2\cos 2\varphi\big); \dfrac{1}{2}\big(1+r^2\cos 2\varphi\big)$.

13. $r\sin\varphi + \mathrm{const}$; $r(\sin\varphi+\cos\varphi) + \mathrm{const}$; нет решений.

14. $u = \dfrac{1}{r}\cos\varphi$.

15. $u = \dfrac{1}{r}\cos\varphi + \mathrm{const}$.

16. $u = \log_{\frac{a}{b}} \dfrac{\sqrt{a}r}{\sqrt{b}b} + \dfrac{r^4 - a^2b^2}{2r^2\left(a^2 - b^2\right)}\cos 2\varphi.$

17. $u(r,\varphi) = \dfrac{r(r-a)}{3}\sin\varphi + r^2\sin 2\varphi.$

18. $u = \dfrac{r^2 - a^2}{4} + \dfrac{b^2 - a^2}{4}\ln_{\frac{a}{b}}\left(\dfrac{r}{a}\right) + \dfrac{a^3\left(b^2 - r^2\right)\sin\varphi + b^3\left(r^2 - a^2\right)\cos\varphi}{r\left(b^2 - a^2\right)}.$

20. $G(M_0, M) = \dfrac{1}{4\pi R_{M_0M}} - \dfrac{1}{4\pi R_{M_1M}}$, $M_0 = M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M = M(x, y, z)$,

$M_1 = M_1(x_0, -y_0, z_0)$. $u(M_0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_0}{\left((x-x_0)^2 + y_0^2 + (z-z_0)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mu(x,z)\,dx\,dz$

— решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве.

$u(x_0, y_0) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2}\mu(x)\,dx$ — решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости.

21. 1) $$G(M_0, M) = G(x_0, y_0, z_0; x, y, z) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\sum_{i=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^{i+k}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + \left(y - (-1)^i y_0\right)^2 + \left(z - (-1)^k z_0\right)^2}}.$$

22. 1) $$G(M_0, M) = G(x_0, y_0; x, y) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=0}^{1}\sum_{k=0}^{1}(-1)^{i+k}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{\left(x - (-1)^i x_0\right)^2 + \left(y - (-1)^k y_0\right)^2}}\right).$$

24. Если отрицательные заряды распределены по стороне поверхности S, внешней по отношению к D, то $w(M) = \begin{cases} 0, \text{ если } M \notin \bar{D}; \\ 2\pi\nu_0, \text{ если } M \in S; \\ 4\pi\nu_0, \text{ если } M \in D. \end{cases}$

29. $v(r) = \begin{cases} 4\pi\mu_0 a, \text{ если } r \le a; \\ \dfrac{4\pi\mu_0 a^2}{r}, \text{ если } r \ge a; \end{cases}$

где a — радиус сферы; r — расстояние от центра сферы до точки наблюдения.

31. $u(r) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{3}\left(3a^2 - r^2\right)\rho_0, \text{ если } r \le a; \\ \dfrac{4\pi a^3}{3r}\rho_0, \text{ если } r \ge a, \end{cases}$

где a — радиус шара; r — расстояние от центра шара до точки наблюдения.

34. $\lambda_n = \left(\dfrac{\pi n}{a}\right)^2$, $v_n(r) = \dfrac{1}{r}\sin\left(\dfrac{\pi n}{a} r\right)$, $n = 1, 2, \ldots$

При $m \neq n$ v_m и v_n ортогональны в смысле скалярного произведения $(v_m, v_n) = \int\limits_0^a v_m(r) v_n(r) r^2 dr$.

Если $c < 0$, то задача Дирихле для уравнения Гельмгольца имеет единственное решение: $v(r) = \dfrac{v_0 a}{\operatorname{sh}\left(\sqrt{-c}a\right)} \dfrac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{-c}r\right)}{r}$. Если $c = 0$, то $v(r) = v_0 = \text{const}$. Если $c > 0$ и $c \neq \lambda_n$ при всех n, то единственным решением является $v(r) = \dfrac{v_0 \cdot a}{\sin\left(\sqrt{c}a\right)} \dfrac{\sin\left(\sqrt{c}r\right)}{r}$. Если $c = \lambda_{n_0}$ и $v_0 \neq 0$, то задача не имеет решений. Если $c = \lambda_{n_0}$ и $v_0 = 0$, то имеется бесконечно много решений $v(r) = \text{const} \dfrac{\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_0}} r\right)}{r}$.

35. Если $c < 0$, то $v(r) = \dfrac{F_0}{c}\left(1 - \dfrac{a}{\operatorname{sh}\left(\sqrt{-c}a\right)} \dfrac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{-c}r\right)}{r}\right)$. Если $c = 0$, то $v(r) = \dfrac{F_0}{6}\left(r^2 - a^2\right)$. Если $c = \left(\dfrac{\pi n_0}{a}\right)^2$ при некотором натуральном n_0 и $F_0 \neq 0$, то решений нет. Если $c = \left(\dfrac{\pi n_0}{a}\right)^2$ и $F_0 = 0$, то имеется бесконечно много решений: $v(r) = \text{const} \dfrac{\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_0}} r\right)}{r}$. Если $c > 0$ и $c \neq \left(\dfrac{\pi n}{a}\right)^2$ при всех натуральных n, то $v(r) = \dfrac{F_0}{c}\left(1 - \dfrac{a}{\sin\left(\sqrt{c}a\right)} \dfrac{\sin\left(\sqrt{c}r\right)}{r}\right)$.

36. $u(r, \varphi) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{r}{a}\right)^{n^4} \dfrac{\cos\left(n^4 \varphi\right)}{n^p}$.

$\iint\limits_{x^2+y^2 \leq a^2} \left[\left(u_x\right)^2 + \left(u_y\right)^2\right] dxdy = \pi \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{2p-4}}$. Поэтому решение $u(r, \varphi)$ можно построить, минимизируя интеграл Дирихле, при $p > \dfrac{5}{2}$. При $1 < p \leq \dfrac{5}{2}$ интеграл Дирихле обращается в $+\infty$.

3. $u(x,t)=\begin{cases}\sin\big(k(x-at)\big), x\geq at;\\ 0, 0\leq x\leq at.\end{cases}$

$$u\left(\frac{2\pi}{k},t\right)=\begin{cases}-\sin(kat), 0<t\leq\dfrac{2\pi}{ka};\\ 0, t\geq\dfrac{2\pi}{ka}.\end{cases}\quad u\left(x,\frac{3\pi}{ka}\right)=\begin{cases}0, 0\leq x\leq\dfrac{3\pi}{k};\\ -\sin(kx), x\geq\dfrac{3\pi}{k}.\end{cases}$$

4.
$$u\left(\frac{\pi}{4},t\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos(at), 0<t\leq\dfrac{\pi}{4a};\\ \dfrac{1}{2}\cos\left(at-\dfrac{\pi}{4}\right), \dfrac{\pi}{4a}\leq t\leq\dfrac{3\pi}{4a};\\ 0, t\geq\dfrac{3\pi}{4a}.\end{cases}$$

$$u\left(x,\frac{\pi}{4a}\right)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x, 0\leq x\leq\dfrac{\pi}{4};\\ \dfrac{1}{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right), \dfrac{\pi}{4}\leq x\leq\dfrac{3\pi}{4};\\ 0, x\geq\dfrac{3\pi}{4}.\end{cases}$$

5. а) $\begin{cases}0, x\geq at;\\ -g(at-x), 0\leq x\leq at;\end{cases}$ б) $\begin{cases}0, x\geq at;\\ g(at-x), 0\leq x\leq at.\end{cases}$

6. а) $\varphi(0)=0$, $\psi(0)=0$; б) $\varphi_x(0)=0$, $\psi_x(0)=0$.

7. $at-l<R_{OM}<at+l$, $t>0$ ($0\leq R_{OM}<at+l$ при $t<\dfrac{l}{a}$).

8. $R_{OM}<at+l$, $t>0$.

11. $u(x,t)=\cos\dfrac{3at}{2}\sin\dfrac{3x}{2}+\cos\dfrac{5at}{2}\sin\dfrac{5x}{2}+\dfrac{2}{7}\sin\dfrac{7at}{2}\sin\dfrac{7x}{2}$.

15. $u_{tt}=a^2u_{xx}$, $0<x<l$, $t>0$;

$u_x(0,t)=\dfrac{f}{k}$, $u_x(l,t)=\dfrac{f}{k}$, $t>0$, k — коэффициент упругости;

$u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=0$, $0\leq x\leq l$.

Метод разделения переменных дает решение

$$u(x,t)=\frac{f}{k}\left[x-\frac{l}{2}+\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(\dfrac{\pi}{l}(2n+1)at\right)}{(2n+1)^2}\cos\left(\frac{\pi}{l}(2n+1)x\right)\right];$$

$$u\left(\frac{l}{2},t\right)=0 \text{ для всех } t.$$

16. $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})$, $M(x,\,y)\in D$, $t>0$;
$u(x,\,0,\,t)=u(l_1,\,y,\,t)=u(x,\,l_2,\,t)=u(0,\,y,\,t)=0$, $t\geq 0$;
$u(x,\,y,\,0)=0$, $u_t(x,\,y,\,0)=v_0=\text{const}$, $M(x,y)\in\overline{D}$.
Метод разделения переменных дает решение

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1,k=1}^{\infty}B_{n,k}\sin\left(\sqrt{\lambda_{n,k}}at\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l_1}x\right)\sin\left(\frac{\pi k}{l_2}y\right);$$

$$\lambda_{n,k}=\left(\frac{\pi n}{l_1}\right)^2+\left(\frac{\pi k}{l_2}\right)^2,\quad B_{n,k}=\frac{4v_0\left(1-(-1)^n\right)\left(1-(-1)^k\right)}{a\sqrt{\lambda_{n,k}}\pi^2nk}.$$

17. $\lambda_n=\left(\dfrac{\pi(2n+1)}{2l}\right)^2$, $\omega_n=\dfrac{\pi(2n+1)}{2l}a$. Если $\omega\neq\omega_n$ при всех $n=0$, 1, 2, ..., то

$$u(x,t)=\nu\sin(\omega t)\left[x+\frac{2a^2\omega^2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)}{\omega_n^2\left(\omega_n^2-\omega^2\right)}\right]-$$

$$-\nu\frac{2a^2\omega}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(\omega_n t)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)}{\omega_n\left(\omega_n^2-\omega^2\right)}.$$

Если $\omega=\omega_{n_0}$ при некотором n_0, то

$$u(x,t)=\nu\sin(\omega t)\left[x+\frac{2a^2\omega^2}{l}\sum_{\substack{n=0\\n\neq n_0}}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)}{\omega_n^2\left(\omega_n^2-\omega^2\right)}-\frac{a^2(-1)^{n_0}}{\omega^2 l}\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_0}}x\right)\right]-$$

$$-\nu t\cos(\omega t)\left[\frac{a^2(-1)^{n_0}}{\omega l}\sin\left(\sqrt{\lambda_{n_0}}x\right)\right]-\frac{2\nu a^2\omega}{l}\sum_{\substack{n=0\\n\neq n_0}}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin(\omega_n t)\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)}{\omega_n\left(\omega_n^2-\omega^2\right)}.$$

18. Приведем решение задачи. Классическое решение

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{N}u_n(x,t):\ \text{при } n=0,\ 1,\ \ldots,\ N$$

$$u_n(x,t)=\left[A_n\cos(\omega_n t)+B_n\sin(\omega_n t)\right]\cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right),$$

где $\lambda_n=\left(\dfrac{\pi}{2l}(2n+1)\right)^2$; $\omega_n=a\sqrt{\lambda_n}$, $A_n=\varphi_n$, $B_n=\dfrac{\psi_n}{\omega_n}$.

Перепишем $u_n(x,\,t)$ в виде $u_n(x,t)=\sqrt{A_n^2+B_n^2}\cos(\omega_n t-\delta_n)\cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)$,
где $\delta_n=\operatorname{arctg}\dfrac{B_n}{A_n}$.

Гармоническое колебание u_n с частотой ω_n имеет энергию

$$\mathscr{E}_n(t) = \frac{\rho}{2}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}\right)^2 + a^2\left(\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}\right)^2\right]dx = = \frac{\rho}{2}\left(A_n^2 + B_n^2\right)\omega_n^2 \times$$

$$\times\int_0^l \left[\sin^2(\omega_n t - \delta_n)\cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right) + \cos^2(\omega_n t - \delta_n)\sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right)\right]dx =$$

$$= \frac{\rho l}{4}\left(A_n^2 + B_n^2\right)\omega_n^2,$$

где $\rho = \text{const}$ — линейная плотность массы струны.

Внешние силы на струну не действуют, поэтому

$$\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}(0) = \frac{\rho}{2}\int_0^l \left[\psi^2(x) + a^2\left(\varphi_x(x)\right)^2\right]dx \quad \text{при всех } t \geq 0.$$

Докажем, что $\mathscr{E}(t) = \sum_{n=0}^{N}\mathscr{E}_n(t)$. Из первого начального условия имеем $\varphi_x(x) = -\sum_{n=0}^{N} A_n\sqrt{\lambda_n}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right)$. В силу ортогональности на отрезке $0 \leq x \leq l$ системы функций $\left\{\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ справедливо равенство

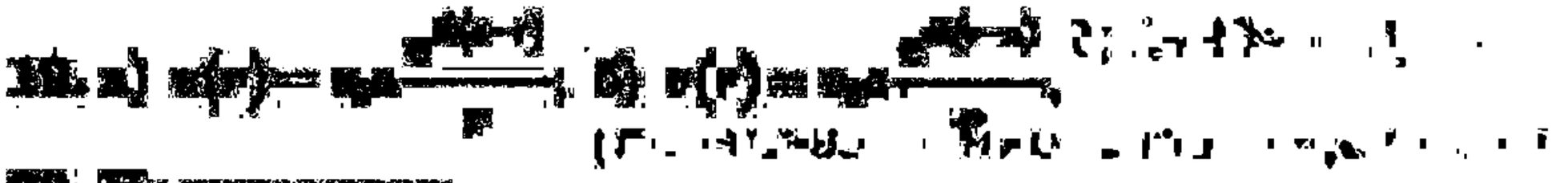
$$a^2\int_0^l \left(\varphi_x(x)\right)^2 dx = a^2\int_0^l \left[\sum_{n=0}^{N} A_n\sqrt{\lambda_n}\sin\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right)\right]\left[\sum_{k=0}^{N} A_k\sqrt{\lambda_k}\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\,x\right)\right]dx =$$

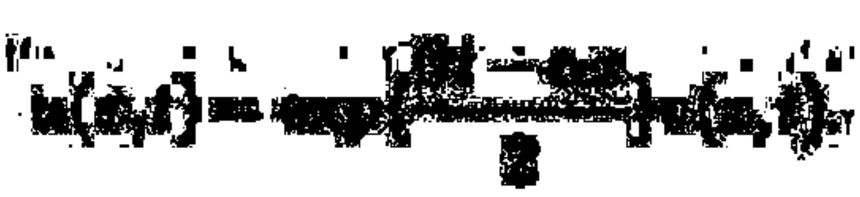
$$= a^2\sum_{n=0}^{N} A_n^2\lambda_n\int_0^l \sin^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right)dx = \frac{l}{2}\sum_{n=0}^{N} A_n^2\omega_n^2.$$

Из второго начального условия $\psi(x) = \sum_{n=0}^{N} B_n\omega_n\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right)$. В силу ортогональности на отрезке $0 \leq x \leq l$ системы функций $\left\{\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right)\right\}_{n=0}^{\infty}$ справедливо равенство

$$\int_0^l \psi^2(x)\,dx = \int_0^l \left[\sum_{n=0}^{N} B_n\omega_n\cos\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right)\right]\left[\sum_{k=0}^{N} B_k\omega_k\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\,x\right)\right]dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{N} B_n^2\omega_n^2\int_0^l \cos^2\left(\sqrt{\lambda_n}\,x\right)dx = \frac{l}{2}\sum_{n=0}^{N} B_n^2\omega_n^2.$$





ПРИЛОЖЕНИЯ

(некоторые справочные сведения)

Приложение 1. Формула среднего значения (интегральная теорема о среднем).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $a \le x \le b$, то на этом отрезке найдется точка ξ такая, что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$. Вследствие этого под средним значением непрерывной функции на отрезке $a \le x \le b$ можно понимать число $\dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$. Аналогичная формула справедлива и в многомерном случае.

Приложение 2. Ротор, дивергенция, градиент. Формула Остроградского.

В трехмерном пространстве введем декартову прямоугольную систему координат $Oxyz$. Пусть $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — ее единичные ($|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$) орты. Будем считать $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ***правой тройкой*** векторов. Напомним понятие ***ротора*** векторного поля. Для дифференцируемого векторного поля

$$\mathbf{A}(x,\ y,\ z) = \{P(x,\ y,\ z),\ Q(x,\ y,\ z),\ R(x,\ y,\ z)\}$$

можно ввести дифференциальную операцию $\mathrm{rot}\mathbf{A}$, которая в ***ортонормированном базисе*** $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ имеет вид

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Если ввести ***оператор Гамильтона*** $\nabla = \mathbf{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$, то ротор поля $\mathbf{A}$ имеет смысл векторного произведения ($\mathrm{rot}\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$), которое символически можно записать в виде определителя:

$$\mathrm{rot}\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Ориентация пространства $Oxyz$ существенна: $\mathrm{rot}\mathbf{A}$ является ***псевдовектором*** (или, что то же самое, — ***аксиальным вектором***). Это значит, что при изменении ориентации пространства на противоположную (правой тройки $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ на левую) он преобразуется в противоположный вектор. В то же время $\mathrm{rot}\mathbf{A}$ инвариантен относительно преобразований декартовых прямоугольных систем координат, имеющих одну и ту же ориентацию. Символ ∇ можно рассматривать как ***вектор***, потому что его компоненты $\dfrac{\partial}{\partial x}$, $\dfrac{\partial}{\partial y}$, $\dfrac{\partial}{\partial z}$ преобразуются при переходе от ортонормированного базиса $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ к другому ортонормированному базису $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$, по тем же правилам, по которым преобразуются компоненты обычных векторов. Поэтому если

$$\mathbf{A} = P(x,\, y,\, z)\mathbf{i} + Q(x,\, y,\, z)\mathbf{j} + R(x,\, y,\, z)\mathbf{k} = P_1(x_1,\, y_1,\, z_1)\mathbf{i}_1 + \\ + Q_1(x_1,\, y_1,\, z_1)\mathbf{j}_1 + R_1(x_1,\, y_1,\, z_1)\mathbf{k}_1,$$

то для векторного произведения двух векторов имеем в одной и той же точке

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} = \\ = \left(\frac{\partial R_1}{\partial y_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial z_1}\right)\mathbf{i}_1 + \left(\frac{\partial P_1}{\partial z_1} - \frac{\partial R_1}{\partial x_1}\right)\mathbf{j}_1 + \left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} - \frac{\partial P_1}{\partial y_1}\right)\mathbf{k}_1$$

— инвариантность формы $\mathrm{rot}\mathbf{A}$.

Формула Остроградского (Остроградского—Гаусса) выражает равенство объемного интеграла от дивергенции векторного поля по ограниченной области полному потоку этого векторного поля через границу этой области, ориентированную в направлении ее внешней нормали.

Напомним понятие ***дивергенции*** векторного поля. Для дифференцируемого векторного поля $\mathbf{A}(x,\, y,\, z) = \{P(x,\, y,\, z),\, Q(x,\, y,\, z),\, R(x,\, y,\, z)\}$ можно ввести дифференциальную операцию $\mathrm{div}\mathbf{A}$, которая в *ортонормированном* базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ имеет вид

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Дивергенцию поля $\mathbf{A}$ можно рассматривать как символическое скалярное произведение оператора Гамильтона ∇ на вектор $\mathbf{A}$: $\mathrm{div}\mathbf{A} = (\nabla,\, \mathbf{A})$. При переходе от ортонормированного базиса $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ к другому ортонормированному базису $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{j}_1$, $\mathbf{k}_1$ символ ∇ преобразуется как обычный вектор, а скалярное произведение векторов инвариантно относи-

тельно преобразований декартовых прямоугольных координат. Поэтому $\mathrm{div}\mathbf{A}$ является инвариантом относительно таких преобразований: если

$$\mathbf{A} = P(x,\, y,\, z)\mathbf{i} + Q(x,\, y,\, z)\mathbf{j} + R(x,\, y,\, z)\mathbf{k} =$$

$$= P_1(x_1,\, y_1,\, z_1)\mathbf{i}_1 + Q_1(x_1,\, y_1,\, z_1)\mathbf{j}_1 + R_1(x_1,\, y_1,\, z_1)\mathbf{k}_1,$$

то в одной и той же точке имеем

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial y_1} + \frac{\partial R_1}{\partial z_1}.$$

Дивергенция поля $\mathbf{A}$ имеет простой физический смысл: если считать, что в некоторой пространственной области D имеется стационарное течение жидкости, скорость которой в каждой точке $(x,\, y,\, z)$ равна $\mathbf{A}(x,\, y,\, z)$, то $\mathrm{div}\mathbf{A}$ представляет собой производительность в точке $(x,\, y,\, z)$ непрерывно распределенных по D источников (или стоков) этой жидкости. Условие $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$ означает отсутствие источников или стоков.

Пусть D — ограниченная область в $Oxyz$, быть может, многосвязная. Пусть кусочно-гладкая поверхность S является ее полной границей. Будем считать, что S ориентирована с помощью поля единичных нормалей $\mathbf{n}$, направленных *во внешность* области D. Пусть функции $P(x,\, y,\, z)$, $Q(x,\, y,\, z)$, $R(x,\, y,\, z)$ непрерывны в замкнутой области $D \cup S$ и имеют непрерывные частные производные первого порядка в (открытой) области D. Пусть существуют интегралы по области D от *всех* частных производных первого порядка функций P, Q, R, вообще говоря, *несобственные*. Векторное поле $\mathbf{A} = \{P,\, Q,\, R\}$.

***Справедлива формула Остроградского*:**

$$\iiint\limits_D \mathrm{div}\mathbf{A}\, dD = \oiint\limits_S (\mathbf{A}, \mathbf{n})\, dS. \qquad (\Pi.1)$$

Здесь интеграл по S представляет собой сумму интегралов по всем связным компонентам границы области D. Этот интеграл можно записать в виде поверхностного интеграла *второго рода* по внешней стороне поверхности S:

$$\oiint\limits_S (\mathbf{A}, \mathbf{n})\, dS = \oiint\limits_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy,$$

либо в виде интеграла *первого рода*:

$$\oiint\limits_S (\mathbf{A}, \mathbf{n})\, dS = \oiint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS,$$

где α, β, γ — углы, которые составляет с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ вектор $\mathbf{n}$ в данной точке поверхности S.

В выбранной декартовой системе координат $Oxyz$

$$\iiint\limits_D \operatorname{div}\mathbf{A}\,dD = \iiint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz.$$

Формула (П.1) записана в инвариантном виде.

Замечание П.1. Интеграл по S в (П.1) называется ***потоком*** вектора $\mathbf{A}$ через поверхность S. Если интерпретировать $\mathbf{A}$ как скорость течения жидкости в области D, то поток — это количество жидкости, пересекающей поверхность S в единицу времени (вытекающей из D, если $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль). ■

Замечание П.2. Формула Остроградского лежит в основе вывода первой, второй и третьей формул Грина, из которых следуют все основные свойства гармонических функций трех переменных. ■

Градиентом дифференцируемой скалярной функции $u(M)$ (скалярного поля) в точке $M = M(x_1, \ldots, x_n)$ называется такой n-мерный вектор $\operatorname{grad}u(M)$, что скалярное произведение вектора $\operatorname{grad}u(M)$ и вектора приращений аргументов $\mathbf{dx} = \{dx_1,\ldots,dx_n\}$ является дифференциалом функции u в точке M:

$$u(M+\mathbf{dx})-u(M) = \big(\operatorname{grad}u(M),\mathbf{dx}\big)+o\left(\sqrt{(dx_1)^2+\ldots+(dx_n)^2}\right) \quad (\text{П.2})$$

при $\sqrt{(dx_1)^2+\ldots+(dx_n)^2}\to 0$; $du(M) = \big(\operatorname{grad}u(M),\mathbf{dx}\big)$. Например, в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$

$$\operatorname{grad}u(x,y,z) \equiv \nabla u(x,y,z) = \frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z}\mathbf{k}$$

(символическое умножение вектора ∇ на скаляр u). Понятие «градиент скалярного поля», введенное по (П2), не зависит от выбора системы координат, т.е. является инвариантом скалярного поля. Если начало вектора $\operatorname{grad}u(M)$ поместить в точку M, то такой вектор будет указывать направление наискорейшего роста функции $u(M)$, которое оказывается ортогональным поверхности уровня (или линии уровня) функции u, проходящей через точку M.

Теорема П.1. Производная от u в точке M по направлению единичного вектора $\mathbf{l}$ равна проекции вектора $\operatorname{grad}u(M)$ на это направление:

$$\frac{\partial u(M)}{\partial l} = \big(\operatorname{grad}u(M),\mathbf{l}\big).$$

Если в области $D\subset\mathbb{R}^3$ векторное поле $\mathbf{A}(M)$ и скалярное поле $u(M)$ принадлежат $C^2(D)$, то в D возможны *повторные операции*: $\operatorname{rot}\operatorname{grad}u(M)\equiv\mathbf{0}$, $\operatorname{div}\operatorname{grad}u(M)$, $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}(M)$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}(M)\equiv 0$,

rot rot$\mathbf{A}(M)$. Операция div grad$u(M)$ называется оператором Лапласа; в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ (в ортонормированном базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$) $\Delta u(M) = \text{div grad} u(M) = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$, $M = M(x, y, z)$. Если $\mathbf{A}(M) = \{P(M), Q(M), R(M)\}$ в $Oxyz$, то rot rot$\mathbf{A}(M) =$ $= \text{grad div}\mathbf{A}(M) - \Delta\mathbf{A}(M)$, где $\Delta\mathbf{A}(M) = \{\Delta P(M), \Delta Q(M), \Delta R(M)\}$.

Приложение 3. Аналитическая функция.

Аналитическая функция — это функция, представимая степенным рядом. Функция нескольких действительных независимых переменных $u(x_1, \ldots, x_n)$ называется аналитической в точке $\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$, если в некоторой окрестности этой точки она представляется в виде *равномерно* сходящегося степенного ряда: $u(x_1, \ldots, x_n) =$

$$= \sum_{i_1 + \ldots + i_n \geq 0} C_{i_1, \ldots, i_n} \left(x_1 - x_1^0\right)^{i_1} \ldots \left(x_n - x_n^0\right)^{i_n}.$$ Если это свойство имеет место в каждой точке области $D \subset \mathbb{R}^n$, то функция u называется аналитической в области D.

Приложение 4. Квадратичные формы, их канонический вид. Закон инерции.

Будем рассматривать x и y как независимые переменные, пробегающие все линейное пространство $\mathbf{V}$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Введем отображение B: $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbb{R}$, причем будем считать, что значения $B(x; y)$ определяются только элементами x, y и не зависят от выбора базиса в $\mathbf{V}$. Отображение $B(x; y)$ называют ***билинейной формой***, если при каждом фиксированном y $B(x; y)$ является линейной формой (линейным функционалом) от x, а при каждом фиксированном x — линейной формой от y.

Если $\dim\mathbf{V} = m < \infty$ и $e = (e_1, \ldots, e_m)$ — базис пространства $\mathbf{V}$, то $x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i$, $y = \sum_{k=1}^{m} y_k e_k$, и билинейная форма в базисе e имеет вид

$$B(x;y) = B\left(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i; \sum_{k=1}^{m} y_k e_k\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} x_i y_k B(e_i; e_k) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} a_{ik} x_i y_k.$$

Коэффициенты $a_{ik} = B(e_i; e_k)$ составляют матрицу билинейной формы в базисе e.

Поскольку ранг матрицы билинейной формы не зависит от выбора базиса в пространстве $\mathbf{V}$, это число естественно назвать ***рангом билинейной формы***.

Билинейную форму называют ***симметричной***, если для любых $x, y \in \mathbf{V}$ $B(x; y) = B(y; x)$.

Пример П.1. В действительном евклидовом пространстве скалярное произведение является симметричной билинейной формой. ■

В базисе e коэффициенты билинейной формы $a_{ik} = B(e_i; e_k)$, поэтому матрица симметричной билинейной формы симметрична: $a_{ik} = a_{ki}$ для всех i и k.

Замечание П.3 (***о термине «форма»***). Многочлен $h(x_1, \ldots, x_m)$ называют **однородным многочленом степени** k, если $h(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_m) = \alpha^k h(x_1, \ldots, x_m)$. Например, выражение $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ является однородным многочленом степени 2 относительно переменных x_1, x_2, x_3. Если в пространстве $\mathbf{V}$ фиксирован базис, то линейный функционал $l(x)$ является однородным многочленом первой степени относительно координат элементов x в этом базисе. Однородные многочлены степени k принято называть ***формами*** степени k. При $k = 1$ получаем линейные формы, при $k = 2$ — квадратичные формы. ■

Пусть $B(x; y)$ — *симметричная билинейная форма*, определенная на линейном пространстве $\mathbf{V}$. Функцию $Q(x) = B(x; x)$ называют ***квадратичной формой***, определенной на $\mathbf{V}$.

Замечание П.4. Мы потребовали, чтобы $B(x; y) = B(y; x)$. Это объясняется следующими соображениями. Если взять *произвольную билинейную форму* $B(x; y)$, то выражение $\frac{1}{2}\big(B(x;y) + B(y;x)\big)$ будет *симметричной билинейной формой*. Положим в нем $y = x$, тогда получим $\frac{1}{2}\big(B(x;x) + B(x;x)\big) = B(x;x)$, т.е. то же самое, как если бы в исходной форме $B(x; y)$ мы положили $y = x$. ■

Исходную *симметричную билинейную форму* $B(x; y)$ называют ***полярной*** для квадратичной формы $Q(x) = B(x; x)$. Матрицей квадратичной формы, определенной на конечномерном линейном пространстве, называют матрицу ее полярной билинейной формы.

Определение П.1. Вид квадратичной формы с диагональной матрицей называют ее ***каноническим видом***.

Канонический вид квадратичной формы не является однозначно определенным. Если в некотором базисе линейного пространства $\mathbf{V}$ квадратичная форма $Q(x)$ имеет канонический вид, то переставляя элементы этого базиса (т.е. производя перенумерацию независимых переменных), снова получим $Q(x)$ в каноническом виде. Если $Q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_m x_m^2$, то, полагая $x_1 = \alpha_1 \tilde{x}_1, x_2 = \alpha_2 \tilde{x}_2, \ldots, x_m = \alpha_m \tilde{x}_m$, где все коэффициенты $\alpha_i \neq 0$, получим другой канонический вид $Q(x) = \big(\lambda_1 \alpha_1^2\big)\tilde{x}_1{}^2 + \big(\lambda_2 \alpha_2^2\big)\tilde{x}_2{}^2 + \ldots + \big(\lambda_m \alpha_m^2\big)\tilde{x}_m{}^2$.

Пример П.2. Пусть $Q(x) = \gamma_1 x_1^2 + \gamma_2 x_2^2 + \ldots + \gamma_m x_m^2$ — некоторый канонический вид квадратичной формы. Предположим для простоты,

что $\gamma_1 > 0, \ldots, \gamma_p > 0, \gamma_{p+1} < 0, \ldots, \gamma_{p+n} < 0, \gamma_{p+n+1} = 0, \ldots, \gamma_m = 0$. Выберем новые переменные

$$\tilde{x}_i = \begin{cases} \sqrt{\gamma_i} x_i, 1 \le i \le p; \\ \sqrt{-\gamma_i} x_i, p+1 \le i \le p+n; \\ x_i, p+n+1 \le i \le m. \end{cases}$$

Тогда $Q(x) = \tilde{x}_1{}^2 + \ldots + \tilde{x}_p^2 - \tilde{x}_{p+1}^2 - \ldots - \tilde{x}_{p+n}^2$ — другой канонический вид той же квадратичной формы. Он получен из предыдущего действительным линейным невырожденным преобразованием независимых переменных. ■

Определение П.2. Канонический вид квадратичной формы с коэффициентами $-1, 0, +1$ называют ее ***нормальным видом***.

Что общего у разных канонических видов, к которым приводится одна и та же квадратичная форма? Для любых двух ее канонических видов $Q(x) = \gamma_1 x_1^2 + \gamma_2 x_2^2 + \ldots + \gamma_m x_m^2 = \beta_1 \tilde{x}_1^2 + \beta_2 \tilde{x}_2^2 + \ldots + \beta_m \tilde{x}_m^2$ задающие их диагональные матрицы имеют одинаковые ранги. Поэтому число ненулевых членов во всех канонических видах $Q(x)$ одинаково. Оно равно рангу матрицы квадратичной формы и называется ***рангом квадратичной формы***. Но этим не исчерпывается общность канонических видов одной и той же $Q(x)$.

Теорема П.2 (закон инерции квадратичных форм). При любом преобразовании квадратичной формы, определенной на действительном линейном пространстве, к каноническому виду число p положительных членов и число n отрицательных членов в каноническом виде будут одними и теми же.

Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка, линейные относительно старших производных, с действительными коэффициентами можно классифицировать и приводить к наипростейшему виду с помощью приведения к каноническому виду отвечающих им квадратичных форм.

Приложение 5. Гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$.

Гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$ это обобщение понятия обычной поверхности в $\mathbb{R}^3$. Размерность гиперповерхности по определению считается равной $n-1$.

Примером гиперповерхности является ***гиперплоскость***. Гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$ — это результат сдвига на некоторый вектор $\mathbf{x}_0$ линейного подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$ размерности $n-1$, т.е. множество в $\mathbb{R}^n$ вида $\mathbf{x}_0 + L$. В частности, линейное подпространство L размерности $n-1$ (гиперподпространство) является гиперплоскостью, проходящей через

начало координат. Множество в $\mathbb{R}^n$ является гиперплоскостью в том и только в том случае, если все его элементы $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяют ***линейному уравнению*** $f(\mathbf{x}) = b = \text{const}$, где f — ненулевой ***линейный функционал*** (f и b определены с точностью до общего ненулевого множителя). Если в $\mathbb{R}^n$ фиксирован некоторый базис, и в этом базисе вектор $\mathbf{x}$ имеет координаты $(x_1, \ldots, x_n)$, то указанное уравнение имеет вид $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$, где не все коэффициенты a_i равны нулю. В $\mathbb{R}^2$ гиперплоскостью является любая прямая, в $\mathbb{R}^3$ — любая (двумерная) плоскость.

Гладкая гиперповерхность — это гиперповерхность, в каждой точке которой можно провести касательную гиперплоскость.

Пример П.3. Гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^2$ является плоской кривой (без особых точек). Если в декартовой системе координат Oxy она задана уравнением $\omega(x, y) = 0$, причем во всех ее точках $(\omega_x)^2 + (\omega_y)^2 \neq 0$, то в точке (x_0, y_0) этой кривой касательная к ней прямая удовлетворяет уравнению $\omega_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \omega_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$. Вектор $\{\omega_x(x_0, y_0), \omega_y(x_0, y_0)\}$ есть вектор нормали к данной кривой в точке (x_0, y_0). ■

Пример П.4. Гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^3$ (без особых точек) в системе координат $Oxyz$ может быть задана уравнением $\omega(x, y, z) = 0$, где $(\omega_x)^2 + (\omega_y)^2 + (\omega_z)^2 \neq 0$ во всех ее точках. В точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ этой поверхности касательная к ней плоскость удовлетворяет уравнению $\omega_x(M_0)(x - x_0) + \omega_y(M_0)(y - y_0) + \omega_z(M_0)(z - z_0) = 0$. Вектор $\{\omega_x(M_0), \omega_y(M_0), \omega_z(M_0)\}$ есть вектор нормали к данной поверхности в точке M_0. ■

Приложение 6. Первый интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ изменения переменных $(x_1, \ldots, x_n, t)$ дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_1, \ldots, x_n, t); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = a_n(x_1, \ldots, x_n, t), \end{cases} \tag{П.3}$$

где все функции $a_i \in C^1(D)$. Первый интеграл системы (П.3) — это равенство

$$\omega(x_1, \ldots, x_n, t) = \text{const}, \tag{П.4}$$

справедливое вдоль каждой интегральной кривой системы (П.3) в D. Здесь $\omega \in C^1(D)$. Иногда первым интегралом называют не равенство (П.4), а саму функцию $\omega(x_1, \ldots, x_n, t)$, сохраняющую постоянное значение вдоль каждой проходящей в D интегральной кривой. Первые интегралы часто имеют физический смысл. Например, для уравнений

движения механической системы первыми интегралами будут закон сохранения энергии и закон сохранения импульса. Странное название «первый интеграл» осталось в математике с тех времен, когда все дифференциальные уравнения пытались решить путем интегрирования; то, что сейчас называют решением, именовали тогда «интегралом».

Приложение 7. Некоторые функциональные пространства.

Напомним, что $C[a, b]$ — обозначение линейного бесконечномерного пространства функций $f(x)$, *непрерывных на отрезке* $a \le x \le b$, с нормой $\|f\| = \max\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$. Сходимость в смысле этой нормы последовательности функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ее ***равномерной сходимостью*** на отрезке $a \le x \le b$. Аналогичный смысл имеет обозначение $C(\overline{D})$, $\overline{D} \subset \mathbb{R}^n$. Если D — открытая область, то $f \in C(D)$ означает, что функция f непрерывна во всех точках области D.

• $C^m[a, b]$ — обозначение пространства m раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $a \le x \le b$ функций $f(x)$ с нормой $\|f\| = \sum\limits_{i=0}^{m} \max\limits_{a \le x \le b} |f^{(i)}(x)|$.

Если D — открытая область в $\mathbb{R}^n$, то $f \in C^m(D)$ означает, что функция f от n независимых переменных m раз непрерывно дифференцируема в D. Запись $f \in C^m(\overline{D})$ означает, что все частные производные функции f вплоть до m-го порядка непрерывны в замкнутой области $\overline{D}$. Если требуется указать, что функция $f(x, t)$ имеет в $D \subset \mathbb{R}^2$ непрерывные производные $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial t}$, то пишут $f \in C^{2,1}(D)$.

• $\tilde{L}_2[a,b]$ — пространство непрерывных на отрезке $a \le x \le b$ функций $f(x)$ (вещественнозначных или комплекснозначных) с нормой $\|f\| = \left[\int\limits_a^b |f(x)|^2 \, dx\right]^{1/2}$ (интеграл понимают в смысле Римана). Сходимость в смысле этой нормы последовательности функций $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ее ***сходимостью в среднем квадратическом*** на отрезке $a \le x \le b$. Пространство $\tilde{L}_2[a,b]$ не является полным; его пополнение обозначают через $L_2[a, b]$. Элементами пространства $L_2[a, b]$ являются функции f, для которых существует $\int\limits_a^b |f(x)|^2 \, dx$ в смысле Лебега.

Приложение 8. Признак Вейерштрасса.

Напомним достаточное условие равномерной сходимости функционального ряда.

Теорема П.3 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда). Пусть все члены $u_n(M)$ функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(M)$, $M = M(x_1, \ldots, x_p)$, определены на множестве $D \subset \mathbb{R}^p$. Если существует такой сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, что для всех точек $M \in D$ и для любого номера n справедливо неравенство $|u_n(M)| \leq a_n$, то указанный функциональный ряд сходится *равномерно* на множестве D.

Приложение 9. Поверхность Ляпунова $S \subset \mathbb{R}^3$.

Это поверхность, обладающая достаточно хорошими свойствами гладкости, которые удобны при изучении потенциалов двойного слоя и простого слоя на S. Поверхность S называется поверхностью Ляпунова, если она удовлетворяет следующим требованиям:

1) поверхность S гладкая: в каждой точке $P \in S$ существует касательная плоскость, а следовательно, и нормаль $\mathbf{n}_p$ (далее все нормали считаем внешними, $|\mathbf{n}_p| = 1$);

2) существует число $r > 0$ (одно и то же для всех точек $P \in S$) такое, что:

• для любой точки $P \in S$ часть $\sum_p$ поверхности S, лежащая в открытом шаре радиуса r с центром в P, является связным множеством;

• каждая прямая, параллельная нормали $\mathbf{n}_p$, пересекает $\sum_p$ не более чем в одной точке;

3) нормаль $\mathbf{n}_p$ как функция точки P удовлетворяет условию Гельдера, т.е. существуют такие числа $A > 0$ и $0 < \delta \leq 1$ (одни и те же для любых двух точек $P_1 \in S$, $P_2 \in S$), что $\left|\mathbf{n}_{P_1} - \mathbf{n}_{P_2}\right| \leq A\left[\rho(P_1, P_2)\right]^{\delta}$, где $\rho(P_1, P_2)$ — расстояние между точками P_1 и P_2.

Иногда от S дополнительно требуют замкнутости и того, чтобы телесный угол, под которым любая часть поверхности S видна из произвольной точки в $\mathbb{R}^3$, был равномерно ограничен.

Задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в области $D \subset \mathbb{R}^3$ с границей S можно свести к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. В этом сведении существенную роль играет предположение о том, что S является поверхностью Ляпунова.

Аналогично формулируется и определение ***кривой Ляпунова*** на плоскости, но теперь второе требование вытекает из первого и третьего.

Приложение 10. Теоремы Фредгольма.

Пусть $\mathbf{X}$ — *конечномерное* евклидово или унитарное *пространство*; T — действующий в $\mathbf{X}$ линейный оператор; T^* — сопряженный оператор. Введем подпространства $\operatorname{Ker} T = \{x \in \mathbf{X} | Tx = 0\}$, $\operatorname{Ran} T = \{y \in \mathbf{X} | \exists x, y = Tx\}$ и $\operatorname{Ker} T^*$, $\operatorname{Ran} T^*$. Справедливо следующее утверждение.

Утверждение П.1. $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Ran} T^*)^\perp$, $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Ran} T)^\perp$.
Из утверждения П.1 немедленно вытекает следующая теорема.

Теорема П.4. Для разрешимости уравнения $T\varphi = f$ необходимо и достаточно, чтобы его правая часть f была ортогональна ко всем решениям ψ_0 сопряженного однородного уравнения $T^*\psi_0 = 0$.

Альтернатива Фредгольма. Либо неоднородное уравнение $T\varphi = f$ имеет, и притом единственное, решение при любой правой части f, либо сопряженное однородное уравнение $T^*\psi_0 = 0$ имеет ненулевое решение.

С точки зрения изучения систем линейных алгебраических уравнений эти теоремы означают следующее. Для разрешимости неоднородной системы с *квадратной матрицей* необходимо и достаточно, чтобы ее правая часть была ортогональна ко всем решениям сопряженной однородной системы. Либо неоднородная система с квадратной матрицей имеет, и притом единственное, решение при любой правой части, либо сопряженная однородная система имеет ненулевое решение.

В теории Фредгольма изучаются интегральные уравнения

$$\varphi(t) - \mu \int_a^b K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t), \tag{П.5}$$

$$\varphi_0(t) - \mu \int_a^b K(t,\tau)\varphi_0(\tau)d\tau = 0, \tag{П.6}$$

$$\psi(t) - \mu \int_a^b K(\tau,t)\psi(\tau)d\tau = g(t), \tag{П.7}$$

$$\psi_0(t) - \mu \int_a^b K(\tau,t)\psi_0(\tau)d\tau = 0. \tag{П.8}$$

Здесь $a \le t \le b$; μ — действительный параметр; K, f, g — заданные действительные функции; φ, φ_0, ψ, ψ_0 — искомые функции.

Если параметр μ, заданные и искомые функции комплексны, то вместо (П.7) и (П.8) рассматривают уравнения

$$\psi(t) - \bar{\mu} \int_a^b \overline{K(\tau,t)}\psi(\tau)d\tau = g(t),\ \psi_0(t) - \bar{\mu} \int_a^b \overline{K(\tau,t)}\psi_0(\tau)d\tau = 0.$$

Далее будем считать, что μ и все функции действительны.

Интегральный оператор $(A\varphi)(t) \equiv \int_a^b K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau$ обычно называют оператором Фредгольма, если он действует в некотором функциональном пространстве $\mathbf{X}$ и *вполне непрерывен* в $\mathbf{X}$. Уравнение (П.5) назы-

вают интегральным уравнением второго рода. Предполагается, что правая часть f и искомая функция φ принадлежат одному и тому же функциональному пространству $\mathbf{X}$. Это требует определенных предположений о ядре $K(t, \tau)$ интегрального оператора A. Значения параметра μ, при которых однородное интегральное уравнение (П.6) имеет в $\mathbf{X}$ ненулевые решения, называют ***характеристическими числами оператора*** A, а сами эти решения — его собственными функциями. Характеристические числа и собственные значения оператора A взаимно обратны, а их собственные функции совпадают.

Теоремы Фредгольма — это сформулированные ниже утверждения, которые справедливы при некоторых предположениях о ядре $K(t, \tau)$ и при определенном выборе функционального пространства $\mathbf{X}$, содержащего f и искомые функции φ, ψ_0.

I. Неоднородное уравнение (П.5) разрешимо при тех и только тех правых частях f, которые ортогональны каждому решению союзного (сопряженного) однородного уравнения (П.8): $\int_a^b f(t)\psi_0(t)dt = 0$ ($\int_a^b f(t)\overline{\psi_0(t)}dt = 0$ в случае комплекснозначных функций).

II. Альтернатива Фредгольма. Либо неоднородное уравнение (П.5) при любой правой части f имеет одно и только одно решение, либо однородное уравнение (П.6) имеет ненулевое решение.

III. При фиксированном значении параметра μ однородные уравнения (П.6) и (П.8) имеют одно и то же, и притом конечное число линейно независимых решений.

IV. Множество характеристических чисел оператора A не более чем счетно и может иметь единственную предельную точку лишь на бесконечности.

Часто под альтернативой Фредгольма понимают вытекающее из теорем Фредгольма утверждение: либо уравнение (П.5) и союзное (сопряженное) с ним уравнение (П.7) имеют единственные решения φ, ψ, каковы бы ни были заданные функции f, g, либо соответствующие однородные уравнения (П.6) и (П.8) имеют ненулевые решения, причем число линейно независимых решений конечно и одинаково для обоих уравнений. Альтернатива Фредгольма означает, что если μ не является характеристическим числом оператора A, то оба уравнения (П.5) и (П.7) однозначно разрешимы *при любых правых частях*, а если μ — характеристическое число, то оба однородных уравнения (П.6) и (П.8) имеют *одинаковое конечное число* линейно независимых решений.

Пример П.5. Ядро $K(t, \tau)$ непрерывно, а f, g и искомые функции принадлежат пространству $C[a, b]$. Тогда справедливы теоремы Фредгольма. ■

Пример П.6. Ядро $K(t, \tau)$ удовлетворяет условию

$\int_a^b \int_a^b K^2(t,\tau)dtd\tau < +\infty$, а f, g и искомые функции принадлежат пространству $L_2[a, b]$. Тогда справедливы теоремы Фредгольма. ■

В качестве области интегрирования в уравнениях (П.5)—(П.8) вместо отрезка $[a, b]$ можно рассматривать некоторое ограниченное или неограниченное измеримое множество в пространстве любого конечного числа измерений.

К интегральным уравнениям второго рода сводятся разнообразные теоретические и практические задачи: краевые задачи Штурма—Лиувилля о собственных значениях дифференциальных операторов, задачи Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа и др. В наиболее простых случаях оказываются справедливыми теоремы Фредгольма.

Приложение 11. Формула (правило) Лейбница дифференцирования по параметру p интеграла, зависящего от этого параметра.

Правило Лейбница можно сформулировать в следующей теореме.

Теорема П.5. Пусть функция $f(\xi, p)$ и ее производная $\frac{\partial f(\xi,p)}{\partial p}$ непрерывны в прямоугольнике $\{\xi_1 \le \xi \le \xi_2\} \times \{p_1 \le p \le p_2\}$. Пусть функции $\alpha(p)$ и $\beta(p)$ определены на отрезке $p_1 \le p \le p_2$, удовлетворяют на нем неравенству $\xi_1 \le \alpha(p) \le \beta(p) \le \xi_2$ и дифференцируемы на этом отрезке. Тогда функция $F(p) = \int_{\alpha(p)}^{\beta(p)} f(\xi,p)d\xi$ дифференцируема на отрезке $p_1 \le p \le p_2$, а ее производная

$$\frac{dF(p)}{dp} = \int_{\alpha(p)}^{\beta(p)} \frac{\partial f(\xi,p)}{\partial p} d\xi + \beta'(p) f\big(\beta(p),p\big) - \alpha'(p) f\big(\alpha(p),p\big).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, Изд-во Моск. ун-та, 2004. — 798 с.

2. *Будак Б. М.* Сборник задач по математической физике / Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. — М. : Наука, 1972. — 687 с.

3. *Ильин В. А.* Основы математического анализа : в 2 ч. Ч. 2 / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. — М. : Наука, 1973. — 447 с.

Дополнительная

4. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. — М. : Наука, 1974. — 431 с.

5. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. — 448 с.

6. *Бицадзе А. В.* Сборник задач по уравнениям математической физики / А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко. — М. : Наука, 1977. — 224 с.

7. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. — М. : Наука, 1976. — 296 с.

8. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М. : Наука, 1971. — 512 с.

9. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М. : Наука, 1979. — 392 с.

10. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. — 208 с.

11. *Захаров Е. В.* Уравнения математической физики / Е. В. Захаров, И. В. Дмитриева, С. И. Орлик. — М. : Изд. отдел фак-та ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова , 2005. — 160 с.

12. *Костомаров Д. П.* Методы математической физики / Д. П. Костомаров, В. Г. Сушко. — М. : Изд. отдел фак-та ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 1989. — 28 с.

13. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М. : Наука, 1976. — 391 с.

14. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными. — М. : Изд-во БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. — 260 с.

15. *Свешников А. Г.* Лекции по математической физике / А. Г. Свешников, А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов В. В. — М. : Наука, Изд-во Моск. ун-та, 2004. — 416 с.

16. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики : в 5 т. — Т. 4, ч. 2. — М. : Наука, 1981. — 550 с.

17. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — М. : Наука, 1966. — 443 с.

18. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. — М. : Изд-во иностр. лит-ры, 1957. — 443 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава 1. **Основные уравнения математической физики** 5

1.1. Уравнения математической физики и описываемые ими процессы 5

1.1.1. Распространение теплоты в стержне. Уравнение теплопроводности с одной пространственной переменной 5

1.1.2. Уравнение теплопроводности с тремя пространственными переменными 10

1.1.3. Уравнение диффузии 12

1.1.4. Стационарное уравнение теплопроводности: уравнения Лапласа и Пуассона 14

1.1.5. Уравнения стационарного растяжения и продольных колебаний упругого стержня 17

1.1.6. Уравнения поперечных колебаний струны и мембраны. Звуковые волны в пространстве 20

1.1.7. Уравнение неразрывности. Уравнение потенциального течения жидкости 23

1.1.8. Система уравнений Максвелла 29

1.1.9. Уравнение Гельмгольца 32

1.1.10. Уравнение Кортевега — де Фриза 35

1.2. Классификация уравнений в частных производных второго порядка. Приведение их к канонической форме 36

1.2.1. Дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка 36

1.2.2. Классификация уравнений, линейных относительно старших производных, с двумя независимыми переменными 37

1.2.3. Классификация уравнений, линейных относительно старших производных, с n независимыми переменными 39
1.2.4. Классификация уравнений общего вида на фиксированном решении 40
1.2.5. Характеристики. Классификация уравнений с двумя независимыми переменными с помощью уравнения характеристик 41
1.2.6. Типы основных уравнений 44
1.3. Задача Коши. Роль характеристик в постановке задачи. Теорема Ковалевской 46
1.3.1. Задача Коши 46
1.3.2. Случай уравнений первого порядка 52
1.3.3. Теорема Ковалевской 56
Задачи для самостоятельного решения 58

Глава 2. **Задачи с начальными и краевыми условиями для уравнения теплопроводности** 62
2.1. Математические модели процессов распространения теплоты. Постановки задач для уравнения теплопроводности 62
2.1.1. Краевые условия 62
2.1.2. Начально-краевые задачи для уравнения теплопроводности. Определения их классических решений 65
2.1.3. Асимптотические случаи задач для уравнения теплопроводности 68
2.1.4. Понятие корректности задачи 69
2.2. Принцип максимума для уравнения теплопроводности. Теоремы сравнения. Единственность и устойчивость решения первой начально-краевой задачи 70
2.2.1. Принцип максимума 70
2.2.2. Принцип экстремума 71
2.2.3. Теоремы сравнения 72
2.2.4. Единственность решения первой начально-краевой задачи 73

2.2.5. Устойчивость решения первой начально-краевой задачи 74
2.3. Построение решений начально-краевых задач для уравнения теплопроводности методом разделения переменных 75
2.3.1. Редукция начально-краевых задач 75
2.3.2. Метод разделения переменных в задачах для однородного уравнения 77
2.3.3. Ортогональность системы собственных функций 79
2.3.4. Зависимость системы собственных функций от краевых условий 80
2.3.5. Метод разделения переменных в задачах для неоднородного уравнения 80
2.3.6. Функция Грина начально-краевой задачи 82
2.3.7. Построение формального решения начально-краевой задачи в прямоугольном параллелепипеде 83
2.3.8. Построение формального решения начально-краевой задачи в круговом цилиндре 86
2.4. Доказательство существования классического решения первой начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности на отрезке 88
2.4.1. Достаточные условия почленного дифференцирования тригонометрических рядов Фурье 88
2.4.2. Существование классического решения 90
2.5. Задача Коши для уравнения теплопроводности, единственность ее решения 92
2.6. Интеграл Пуассона. Существование и устойчивость классического решения задачи Коши. Функция Грина 95
2.6.1. Интеграл Пуассона; интуитивные соображения о его выводе. Функция Грина 95
2.6.2. Существование классического решения задачи Коши 99

2.6.3. Решение задачи Коши для неоднородного уравнения 103
2.6.4. Свойства функции Грина. Ее физический смысл 103
2.6.5. Сведение начально-краевых задач на луче к задачам Коши на прямой 105
2.7. Понятие обобщенной функции. δ-Функция и функция Грина. Понятие обобщенного решения 107
2.7.1. Об аппроксимационном подходе к определению обобщенных решений 107
2.7.2. Понятие обобщенной функции. Использование δ-функции в некоторых задачах для уравнения теплопроводности 108
2.7.3. Обобщенные решения начально-краевых задач для уравнения теплопроводности. Интегральные тождества 114
Задачи для самостоятельного решения 119

Глава 3. **Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона** 125

3.1. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Фундаментальные решения уравнения Лапласа. Пример Адамара 125
3.1.1. Краевые условия 125
3.1.2. Внутренняя задача Дирихле 127
3.1.3. Внутренняя задача Неймана 127
3.1.4. Внутренняя третья краевая задача 128
3.1.5. Внешние краевые задачи 129
3.1.6. Пример некорректной задачи 130
3.2. Формулы Грина в ограниченной области 130
3.2.1. Первая формула Грина в области $D \subset \mathbb{R}^3$ 130
3.2.2. Вторая формула Грина в $D \subset \mathbb{R}^3$ 131
3.2.3. Третья (основная) формула Грина в $D \subset \mathbb{R}^3$ 132
3.2.4. Формулы Грина в области на плоскости $\left(D \subset \mathbb{R}^2\right)$ 134
3.3. Основные свойства гармонических функций 135

3.3.1. Свойство гармонической функции 135
3.3.2. Формула среднего значения 136
3.3.3. Бесконечная дифференцируемость 137
3.3.4. Принцип максимума (минимума) гармонической функции 137
3.4. Единственность классических решений внутренних краевых задач для уравнения Лапласа 139
3.4.1. Единственность решения внутренней задачи Дирихле 139
3.4.2. Характер единственности решения внутренней задачи Неймана 140
3.4.3. Единственность решения третьей внутренней краевой задачи 141
3.5. Регулярность гармонических функций на бесконечности. Формулы Грина в неограниченной области, внешней к ограниченной 143
3.5.1. Регулярные на бесконечности функции трех переменных 143
3.5.2. Регулярные на бесконечности функции двух переменных 147
3.6. Внешние краевые задачи для уравнения Лапласа. Единственность их классических решений 149
3.6.1. Внешняя задача Дирихле в пространстве $\left(D' \subset \mathbb{R}^3\right)$ 149
3.6.2. Внешняя задача Неймана в пространстве $\left(D' \subset \mathbb{R}^3\right)$ 150
3.6.3. Внешняя третья краевая задача в пространстве $\left(D' \subset \mathbb{R}^3\right)$ 151
3.6.4. Внешняя задача Дирихле на плоскости $\left(D' \subset \mathbb{R}^2\right)$ 152
3.6.5. Внешняя задача Неймана на плоскости $\left(D' \subset \mathbb{R}^2\right)$ 154
3.6.6. Внешняя третья краевая задача на плоскости $\left(D' \subset \mathbb{R}^2\right)$ 155
3.7. Решение краевых задач для уравнения Лапласа в областях простой геометрической формы методом разделения переменных 156

3.7.1. Задача Дирихле в прямоугольнике 156
3.7.2. Задача Дирихле в прямоугольном параллелепипеде 159
3.7.3. Задача Дирихле в полуполосе (частный случай) 160
3.7.4. Задача Дирихле в круге 162
3.7.5. Задача Дирихле вне круга 163
3.7.6. Задачи Неймана в круге и вне круга 164
3.7.7. Задача Дирихле в круговом кольце 165
3.7.8. Задача Дирихле в круговом секторе 165
3.8. Функция Грина внутренней задачи Дирихле 166
3.8.1. Функция Грина внутренней задачи Дирихле в области $D \subset \mathbb{R}^3$ 166
3.8.2. Свойства функции Грина внутренней задачи Дирихле 170
3.8.3. Построение функции Грина методом зеркальных изображений 172
3.8.4. Функция Грина внутренней задачи Дирихле в области на плоскости $(D \subset \mathbb{R}^2)$ 172
3.9. Поверхностные потенциалы двойного и простого слоев. Объемный потенциал 173
3.9.1. Потенциалы 173
3.9.2. Поверхностный потенциал двойного слоя 175
3.9.3. Логарифмический потенциал двойного слоя 179
3.9.4. Поверхностный потенциал простого слоя 179
3.9.5. Логарифмический потенциал простого слоя 182
3.9.6. Объемный потенциал 182
3.9.7. Логарифмический потенциал 184
3.10. Бигармонические функции 184
3.11. Внутренние краевые задачи для уравнения Гельмгольца; случаи единственности и неединственности их решений 186
3.12. Принцип Дирихле 188

3.12.1. Интеграл Дирихле и задача его минимизации .. 188
3.12.2. Интеграл Дирихле в круге 190
3.12.3. Экстремальное свойство гармонической функции 192
Задачи для самостоятельного решения 193

Глава 4. **Задачи для волнового уравнения** 199

4.1. Задача Коши для уравнения колебаний бесконечной струны. Формула Даламбера. Корректность задачи Коши 199
4.1.1. Классическое решение задачи Коши на прямой. Формула Даламбера 199
4.1.2. Корректность задачи Коши 202
4.1.3. Множество зависимости решения от начальных условий 203
4.1.4. Решение задачи Коши для неоднородного уравнения 205
4.1.5. Примеры обобщенных решений задачи Коши 207
4.2. Начально-краевые задачи для уравнения колебаний на луче. Построение их решений методом продолжения. Распространение влияния краевого режима 208
4.2.1. Краевые условия 208
4.2.2. Начально-краевые задачи на луче и их сведение к задаче Коши на прямой 210
4.2.3. Распространение волны, вызванной краевым режимом 215
4.3. Задачи Коши для волнового уравнения в пространстве и на плоскости. Формулы Кирхгофа и Пуассона. Метод спуска 216
4.3.1. Классическое решение задачи Коши в пространстве 216
4.3.2. Классическое решение задачи Коши на плоскости. Метод спуска 222
4.3.3. Плоские волны 223

4.3.4. Качественные различия формул Кирхгофа, Пуассона и Даламбера 225
4.4. Начально-краевые задачи для волнового уравнения в ограниченной области изменения пространственных переменных. Построение формальных решений методом разделения переменных. Задачи о резонансе 229
4.4.1. Пример постановки начально-краевой задачи ... 229
4.4.2. Классическое решение начально-краевой задачи 231
4.4.3. Метод разделения переменных 233
4.4.4. Задачи о резонансе 238
4.5. Интеграл энергии. Единственность решений начально-краевых задач для волнового уравнения..... 242
4.5.1. Энергия колеблющейся системы..... 242
4.5.2. Единственность решений начально-краевых задач..... 245
4.6. Доказательство существования классического решения первой начально-краевой задачи для уравнения колебаний струны на отрезке 249
4.7. Задачи об установившихся колебаниях в неограниченной области, условия единственности их решений 253
4.7.1. Амплитуда установившихся колебаний. Расходящиеся в бесконечность волны 253
4.7.2. Условия излучения Зоммерфельда..... 255
4.8. Задача Коши с данными на кривой без характеристических точек. Задача Гурса с данными на характеристиках. Функция Римана..... 259
4.8.1. Задача Коши..... 259
4.8.2. Формально сопряженные дифференциальные операции. Формула Грина 263
4.8.3. Формула Римана 264
4.8.4. Задача Гурса..... 266
4.8.5. Функция Римана..... 268

4.8.6. Смысл формулы Римана: множество зависимости решения задачи Коши от начальных данных 269
4.8.7. Нелинейные задачи Коши и Гурса..... 270
Задачи для самостоятельного решения 271

Типовые задачи для контрольных работ по курсу 277

Ответы..... 281

Приложения (некоторые справочные сведения)..... 292
Приложение 1. Формула среднего значения (интегральная теорема о среднем) 292
Приложение 2. Ротор, дивергенция, градиент. Формула Остроградского 292
Приложение 3. Аналитическая функция 296
Приложение 4. Квадратичные формы, их канонический вид. Закон инерции 296
Приложение 5. Гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$ 298
Приложение 6. Первый интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений 299
Приложение 7. Некоторые функциональные пространства 300
Приложение 8. Признак Вейерштрасса 300
Приложение 9. Поверхность Ляпунова $S \subset \mathbb{R}^3$ 301
Приложение 10. Теоремы Фредгольма 301
Приложение 11. Формула (правило) Лейбница дифференцирования по параметру p интеграла, зависящего от этого параметра 304

Список литературы 305

Учебное издание

Захаров Евгений Владимирович,
Дмитриева Ирина Владимировна,
Орлик Сергей Игоревич

Уравнения математической физики

Учебник

Редактор *И. Г. Волкова*
Технический редактор *Е. Ф. Коржуева*
Компьютерная верстка: *Н. В. Протасова*
Корректор *В. А. Жилкина*

Изд. № 101113354. Подписано в печать 11.02.2010. Формат 60 × 90/16.
Гарнитура «Таймс». Печать офсетная. Бумага офс. № 1. Усл. печ. л. 20,0.
Тираж 1 500 экз. Заказ № 29708.

Издательский центр «Академия». www.academia-moscow.ru
125252, Москва, ул. Зорге, д. 15, корп. 1, пом. 26б.
Адрес для корреспонденции: 129085, Москва, пр-т Мира, 101В, стр. 1, а/я 48.
Тел./факс: (495) 648-0507, 616-00-29.
Санитарно-эпидемиологическое заключение № 77.99.60.953.Д.007831.07.09 от 06.07.2009.

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных издательством
электронных носителей в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru